УДК 532.546

Маданбекова Э.Э.

ЫГУ им. К.Тыныстанова

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ПОДЗЕМНЫХ ВОД В СЛОИСТЫХ ПЛАСТАХ

Выводится условие оптимальности в задаче управления уровнями грунтовых и напорных вод в двухслойных пластах.

Рассмотрим движение подземных вод в слоистых пластах, состоящих из верхнего покровного слоя и расположенных под ним двух напорных пластов, разделенных слабопроницаемой прослойкой. На уровень грунтовых вод (УГВ) влияют также напорные подземные воды, поэтому необходимо изучить совместное управление уровнем грунтовых и напорных вод.

Движение подземных вод в двухслойных пластах описывается следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T_b\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(T_b\dfrac{\partial h}{\partial y}\right)-k_b\dfrac{h-H}{m_b}=\mu_b\dfrac{\partial h}{\partial t}-f_b, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(T\dfrac{\partial H}{\partial y}\right)+k_b\dfrac{h-H}{m_b}-\dfrac{k_n}{m_n}(H-Z)=\mu_{упр}\dfrac{\partial H}{\partial t}-f, \\ (x,y)\in D, \qquad t>0, \end{cases} \tag{1}$$

с начальными

$$\begin{cases} h(x,y,0) = h_0(x,y), \\ H(x,y,0) = H_0(x,y), \qquad (x,y)\in D, \end{cases} \tag{2}$$

и граничными

$$\begin{cases} T_b\dfrac{\partial h}{\partial n}+\beta_b h=\alpha_b, \\ T\dfrac{\partial H}{\partial n}+\beta H=\alpha, \qquad (x,y)\in S=\partial D, \quad t>0, \end{cases} \tag{3}$$

условиями.

В формулах (1)−(3) приняты обозначения: $h(x,y,t)$, $H(x,y,t)$, $Z(x,y,t)$ − отметки УГВ в покровном слое и подземных вод в первом и втором напорных пластах соответственно (м);

$$T_b(x,y,t)=k_b(x,y)[h(x,y,t)-b(x,y)], \tag{4}$$

$T(x,y)=k(x,y)\cdot m(x,y)$ − водопроводимости покровного слоя и первого напорного пласта (*м*^{2}*/сут.*); $m_b(x,y,t)=h(x,y,t)-b(x,y)$, $m(x,y)$ и $m_n(x,y)$ − мощности покровного слоя, первого напорного пласта и слабопроницаемой прослойки, разделяющей напорные пласты соответственно (*м*); $b(x,y)$ − поверхность раздела покровного слоя и первого напорного пласта (*м*); $k_b(x,y)$, $k(x,y)$, $k_ï(x,y)$ − коэффициенты фильтрации покровного слоя, первого напорного пласта и слабопроницаемой прослойки (*м/сут*); $\mu_b(x,y)$ и $\mu_{упр}(x,y)$ − коэффициенты водоотдачи и упругой водоотдачи покровного слоя и первого напорного пласта; $f_b(x,y,t)$ − функция инфильтрации (*м/сут*); $f(x,y,t)$ − функция, учитывающая работу скважин, отбирающих воду из первого напорного пласта (*м/сут*); $h_0(x,y)$ и $H_0(x,y)$ − начальные отметки грунтовых и напорных вод (при $t=0$) (*м*); $\alpha_b(x,y,t)$ и $\alpha(x,y,t)$ − расходы потока грунтовых и напорных вод через границу области фильтрации (*м*^{2}*/сут*); $\beta_b(x,y,t)$ и $\beta(x,y,t)$ − коэффициенты пропорциональности (*м/сут*) (известные функции); D − область фильтрации в плане, $S=\partial D$ − ее граница; $\vec{n}$ − внешняя нормаль к границе области; $\dfrac{\partial}{\partial n}$ − производная по этой нормали.

Уровнем грунтовых вод можно управлять путем проведения гидромелиоративных мероприятий в покровном слое и откачек из эксплуатационных скважин, пробуренных в первый от поверхности земли напорный пласт. Такие мероприятия моделируются функциями $f_b(x,y,t)$ и $f(x,y,t)$, являющимися свободными членами уравнений (1). Эти функции назовем управляющими функциями, или кратко, управлением и обозначим $u=(f_b,\ f)$. При каждом фиксированном управлении $u=(f_b,\ f)$ из краевой задачи (1)−(3) однозначно определяется соответствующее решение $h(x,y,t)=h(x,y,t,u)$ и $H(x,y,t)=H(x,y,t,u)\in L_2\in Q,\quad Q=\{D\times[0,T_0].,[2]$.Так как управление $u=(f_b,\ f)\in L_2(Q)$ может иметь разрывы, то решение задачи (1)−(3) будем понимать в обобщенном смысле. Нелинейность задачи (1)−(3) снимается применением итерации. Разбив временной интервал $0\le t\le T_0$ на равные промежутки $[t_{k-1},t_k]$ $(k=1,2,...,r)$ с шагом $\tau=t_k-t_{k-1}$, на каждом временном слое решаем задачу (1)−(3). В формуле (4) вместо $h(x,y,t)$ используем значения УГВ из предыдущего временного слоя и полученное решение снова подставляем в эту же формулу. Итерационный процесс продолжим до выполнения условия $\max\limits_{(x,y)\in D}\left|h^{(\nu)}-h^{(\nu-1)}\right|<\varepsilon$,

где ν − номер итерации, ε − заданное число.

Задача оптимального управления УГВ состоит в минимизации функционала [3, 4]

$$J(u)=\iint\limits_D\left\{[h(x,y,T_0,u)-\varphi(x,y)]^2+[H(x,y,T_0,u)-g(x,y)]^2\right\}dxdy, \tag{5}$$

при условии, что $h(x,y,t,u)$ и $H(x,y,t,u)$ являются решением краевой задачи (1)−(3). Здесь $\varphi(x,y)\in L_2(D)$ − заданный оптимальный УГВ, $g(x,y)\in L_2(D)$ − заданная функция.

Выведем условие оптимальности задачи управления. Для этого возьмем произвольные управления $u=(f_b,\ f)$, $u+\Delta u=(f_b+\Delta f_b,\ f+\Delta f)$ и соответствующие им решения $h(x,y,t,u)$, $h(x,y,t,u+\Delta u)$ и $H(x,y,t,u)$, $H(x,y,t,u+\Delta u)$. Тогда функции $\Delta h(x,y,t)=h(x,y,t,u+\Delta u)-h(x,y,t,u)$ и $\Delta H(x,y,t)=H(x,y,t,u+\Delta u)-H(x,y,t,u)$ являются обобщенным решением краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T_b\dfrac{\partial \Delta h}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(T_b\dfrac{\partial \Delta h}{\partial y}\right)-k_b\dfrac{\Delta h-\Delta H}{m_b}=\mu_b\dfrac{\partial \Delta h}{\partial t}-\Delta f_b, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial \Delta H}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(T\dfrac{\partial \Delta H}{\partial y}\right)+k_b\dfrac{\Delta h-\Delta H}{m_b}-\dfrac{k_n}{m_n}\Delta H=\mu_{упр}\dfrac{\partial \Delta H}{\partial t}-\Delta f, \\ (x,y)\in D, \qquad t>0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \Delta h(x,y,0)=0, \\ \Delta H(x,y,0)=0, \qquad (x,y)\in D \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} T_b\dfrac{\partial \Delta h}{\partial n}+\beta_b\Delta h=0, \\ T\dfrac{\partial \Delta H}{\partial n}+\beta\Delta H=0, \qquad (x,y)\in S, \quad t>0. \end{cases} \tag{8}$$

Находим приращение функционала [5]:

$$\Delta J(u)=J(u+\Delta u)-J(u)=$$
$$=\iint_D \left\{[h(x,y,T_0,u)+\Delta h(x,y,T_0)-\varphi(x,y)]^2+[H(x,y,T_0,u)+\Delta H(x,y,T_0,u)-g(x,y)]^2\right\}dxdy-$$
$$-\iint_D \left\{[h(x,y,T_0,u)-\varphi(x,y)]^2+[H(x,y,T_0,u)-g(x,y)]^2\right\}dxdy.$$

Имеем

$$\Delta J(u)=2\iint_D [h(x,y,T_0,u)-\varphi(x,y)]\Delta h(x,y,T_0)dxdy++2\iint_D [H(x,y,T_0,u)-g(x,y)]\Delta H(x,y,T_0)dxdy+$$
$$+\iint_D \Delta h^2(x,y,T_0)dxdy+\iint_D \Delta H^2(x,y,T_0)dxdy. \tag{9}$$

Введем произвольные функции $\psi(x,y,t),\, \zeta(x,y,t)\in W_2^{0,1}(Q)$ и образуем равенства

$$A(h,H,f_b,\psi)=\iiint_Q \psi(x,y,t)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T_b\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_b\frac{\partial h}{\partial y}\right)-k_b\frac{h-H}{m_b}-\mu_b\frac{\partial h}{\partial t}+f_b\right]dxdydt=0,$$

$$B(h,H,f,\zeta)=\iiint_Q \zeta(x,y,t)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial y}\right)+k_b\frac{h-H}{m_b}-\frac{k_n}{m_n}(H-z)-\mu_{упр}\frac{\partial H}{\partial t}+f\right]dxdydt=0,$$

Затем составим приращения функционалов $A(h,H,f_b,\psi)$ и $B(h,H,f,\zeta)$:

$$\Delta A(\Delta h,\Delta H,\Delta f_b,\psi)=\iiint_Q \psi(x,y,t)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T_b\frac{\partial \Delta h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_b\frac{\partial \Delta h}{\partial y}\right)-k_b\frac{\Delta h-\Delta H}{m_b}-\mu_b\frac{\partial \Delta h}{\partial t}+\Delta f_b\right]dxdydt=0, \tag{10}$$

$$\Delta B(\Delta h,\Delta H,\Delta f,\zeta)=$$
$$=\iiint_Q \zeta(x,y,t)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial \Delta H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial \Delta H}{\partial y}\right)+k_b\frac{\Delta h-\Delta H}{m_b}-\frac{k_n}{m_n}\Delta H-\mu_{упр}\frac{\partial \Delta H}{\partial t}+\Delta f\right]dxdydt=0. \tag{11}$$

Первые два интеграла в левых частях равенств (10) и (11) интегрируем с учетом граничных условий (8):

$$\iiint_Q \psi(x,y,t)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T_b\frac{\partial\Delta h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_b\frac{\partial\Delta h}{\partial y}\right)\right]dxdydt =$$
$$=\int_0^{T_0}\int_S \psi(x,y,t)T_b\frac{\partial\Delta h}{\partial n}dsdt-\iiint_Q T_b\left(\frac{\partial\Delta h}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\Delta h}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dxdydt\,, \tag{12}$$

$$\iiint_Q \zeta(x,y,t)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial\Delta H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial\Delta H}{\partial y}\right)\right]dxdydt =$$
$$=\int_0^{T_0}\int_S \zeta(x,y,t)T\frac{\partial\Delta H}{\partial n}dsdt-\iiint_Q T\left(\frac{\partial\Delta H}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\Delta H}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dxdydt\,, \tag{13}$$

и подставим формулы (12) и (13) соответственно в равенства (10) и (11). Имеем:

$$\Delta A(\Delta h,\Delta H,\Delta f_b,\psi)=\iiint_Q\left[T_b\left(\frac{\partial\Delta h}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\Delta h}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\psi\left(\mu_b\frac{\partial\Delta h}{\partial t}+k_b\frac{\Delta h-\Delta H}{m_b}-\Delta f_b\right)\right]dxdydt+$$
$$+\int_0^{T_b}\int_S \psi\,\beta_b\,\Delta h\,ds\,dt=0\,, \tag{14}$$

$$\Delta B(\Delta h,\Delta H,\Delta f,\zeta)=\iiint_Q\left[T\left(\frac{\partial\Delta H}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\Delta H}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+\zeta\left(\mu_{упр}\frac{\partial\Delta H}{\partial t}-k_b\frac{\Delta h-\Delta H}{m_b}+\frac{k_n}{m_n}\Delta H-\Delta f\right)\right]dxdydt+$$
$$+\int_0^{T_b}\int_S \zeta\,\beta\,\Delta H\,ds\,dt=0\,. \tag{15}$$

Считаем теперь, что функции $\psi(x,y,t)$ и $\zeta(x,y,t)$ являются обощенным решением краевой задачи

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T_b\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(T_b\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)-k_b\dfrac{\psi-\zeta}{m_b}+\mu_b\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(T\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+k_b\dfrac{\psi-\zeta}{m_b}-\dfrac{k_n}{m_n}\zeta+\mu_{упр}\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}=0,\\ (x,y)\in D,\qquad t>0,\end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases}T_b\dfrac{\partial\psi}{\partial n}+\beta_b\psi=0,\\ T\dfrac{\partial\zeta}{\partial n}+\beta\zeta=0,\qquad (x,y)\in S,\quad 0\le t<T_0\,,\end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases}\psi(x,y,T_0)=-\dfrac{2}{\mu_b}\left[h(x,y,T_0)-\varphi(x,y)\right],\\ \zeta(x,y,T_0)=-\dfrac{2}{\mu_{упр}}\left[H(x,y,T_0)-g(x,y)\right],\quad (x,y)\in D\end{cases} \tag{18}$$

Под обобщенным решением краевой задачи (16)−(18) будем понимать функции

$\psi(x,y,t),\ \zeta(x,y,t)\in W_2^{0,1}(Q)$, удовлетворяющие интегральным тождествам

$$\iiint\limits_Q\left[T_b\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\psi\left(\mu_b\frac{\partial\eta}{\partial t}+\eta k_b\frac{\eta-\xi}{m_b}\right)\right]dxdydt+$$
$$+\int\limits_0^{T_b}\int\limits_S\psi\,\beta_b\,\eta(x,y,t)\,ds\,dt+2\iint\limits_D[h(x,y,T_0)-\varphi(x,y)]\eta(x,y,T_0)dxdy=0\,, \qquad (19)$$

$$\iiint\limits_Q\left[T\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)+\zeta\left(\mu_{упр}\frac{\partial\xi}{\partial t}-k_b\frac{\eta-\xi}{m_b}-\frac{k_n}{m_n}\xi\right)\right]dxdydt+$$
$$+\int\limits_0^{T_b}\int\limits_S\zeta(x,y,t)\,\beta\,\xi(x,y,t)\,ds\,dt+2\iint\limits_D[H(x,y,T_0)-g(x,y)]\xi(x,y,T_0)dxdy=0 \qquad (20)$$

для любых функций $\eta,\ \xi\in W_2^{0,1}(Q)$, обращающихся в нуль при $t=0$.

Полагая $\eta(x,y,t)=\Delta h(x,y,t)$ и $\xi(x,y,t)=\Delta H(x,y,t)$ из формул (14), (15) и (19), (20) получаем

$$2\iint\limits_D[h(x,y,T_0)-\varphi(x,y)]\Delta h(x,y,T_0)dxdy=-\iiint\limits_Q\Delta f_b(x,y,t)\psi(x,y,t)\,dx\,dy\,dt \qquad (21)$$

$$2\iint\limits_D[H(x,y,T_0)-g(x,y)]\Delta H(x,y,T_0)dxdy=-\iiint\limits_Q\Delta f(x,y,t)\zeta(x,y,t)\,dx\,dy\,dt\,. \qquad (22)$$

Подставляя (21) и (22) в (9) получаем формулу для приращения функционала (5):

$$\Delta J(u)=-\iiint\limits_Q[\Delta f_b(x,y,t)\psi(x,y,t)+\Delta f(x,y,t)\zeta(x,y,t)]dxdydt+\iint\limits_D\left[\Delta h^2(x,y,T_0)+\Delta H^2(x,y,T_0)\right]dxdy \qquad (23)$$

Из формулы (23) следует, что функционал (5) дифференцируем и ее градиент имеет вид

$$J'(u)=(\psi(x,y,t,u)\ \zeta(x,y,t,u)), \qquad (24)$$

причем первая компонента пары (24) является «частной» производной по переменной f_b, вторая компонента − по переменной f.

Для нахождения функций $\psi(x,y,t,u)$ и $\zeta(x,y,t,u)$ сначала при фиксированном управлении $u=(f_b,\ f)$ нужно из краевой задачи (1) −(3) определить функции $h(x,y,t,u)$ и $H(x,y,t,u)$, затем, используя «начальные» условия (18), решить краевую задачу (16)−(18).

Для того чтобы управление $u=(f_b,\ f)$ было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы [5]

$$<J(u^*),u-u^*>=\iiint\limits_Q\psi(x,y,t,u^*)\left[f_b(x,y,t)-f_b^*(x,y,t)\right]dxdydt+$$
$$+\iiint\limits_Q\zeta(x,y,t,u^*)\left[f(x,y,t)-f^*(x,y,t)\right]dxdydt\le 0\,, \qquad (25)$$

где $u^*=(f_b^*,\ f^*)$ − оптимальное управление

Если ввести функцию

$$P(h,H,\psi,\zeta,u)=h^2(x,y,t,u)+H^2(x,y,t,u)+\psi(x,y,t,u)\,f_b(x,y,t)+\zeta(x,y,t,u)\,f(x,y,t)\,,$$

то вместо (25) можно написать

$$\iiint\limits_Q\left[P(h^*,H^*,\psi^*,\zeta^*,u)-P(h^*,H^*,\psi^*,\zeta^*,u^*)\right]dxdydt\le 0 \qquad (26)$$

для всех допустимых управлений $u(x,y,t)=(f_b(x,y,t),\ f(x,y,t))$. Неравенство (26) эквивалентно следующему равенству

$\max_u P(h^*,H^*,\psi^*,\zeta^*,u)=P(h^*,H^*,\psi^*,\zeta^*,u^*)$, (27) выражающему принцип максимума Понтрягина [6], который применительно к задаче (1)−(5) формулируется следующим образом:

Для того, чтобы допустимое управление $u=(f_b,\ f)$ и соответствующие ему решения краевой задачи (1)−(3) были оптимальными в смысле минимума функционала (5), необходимо и достаточно, чтобы функции Понтрягина $P(h,H,\psi,\zeta,u)$ удовлетворяли условию(27), в котором ψ^* и ζ^* − решение краевой задачи (16)−(18) при $h=h^*$, $H=H^*$.

Литература:

1. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. − 400 с.
2. Джаныбеков Ч.Дж., Уралиев А.А. Об одном приближенном способе конструирования оптимального управления движениями подземных вод в неоднородной пористой среде // Вестник ИГУ, № 11, 2004. – С. 19 −23.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. − 464 с.
4. Мурзакматов М.У., Маданбекова Э.Э. Оптимальное управление уровнем грунтовых вод в многослойных пластах //Известия КТУ им. Раззакова. Бишкек, № 17, 2009.−с. 188−191.
5. Мурзакматов М.У., Маданбекова Э.Э. Математическая модель неустановившейся фильтрации подземных вод в многослойных пластах//Докл. Междунар. конф. Проблемы управления и информатики, - Бишкек, 2007, Книга 2.− с. 112−117.
6. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. − 644 с.