

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРОГНОЗИРОВАНИИ ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

*Методом статистического анализа строится прогнозирующая функция работы некоторого предприятия с использованием метода наименьших квадратов*

Прогнозирование, основанное на использовании методов статистического анализа ретроспективных данных, допустимо в том случае, когда между прошлым и будущим имеется определенная причинно - следственная связь. Можно утверждать, что анализ ретроспективных данных служит надежной основой для принятия решений относительно будущих хозяйственных действий, однако, не следует забывать, что прогностические оценки, полученные методом статистического анализа, подлежат корректировке в случае, если известны те или иные факторы, влияние которых с той или иной вероятностью ожидается в будущем.

Наиболее характерной задачей прогнозирования, которая решается в каждой фирме, является задача прогнозирования спроса на товары или услуги фирмы. Для решения этой задачи необходимо предварительное изучение рынков сбыта маркетинговыми исследованиями, которые и поставляют необходимую статистическую информацию для применения методов статистического анализа при разработке прогнозов.

Алгоритм построения прогноза методом статистического анализа состоит из следующих шагов:

- строится график зависимости спроса от времени;
- на основе визуального изучения графика делается предположение об аналитической форме кривой, которая наилучшим образом способна аппроксимировать ломаную на графике;
- применяется метод наименьших квадратов для построения прогнозирующей кривой;

Оценивается среднее значение погрешности полученных прогнозных оценок;

- принимается решение об использовании или неиспользовании выбранной кривой для построения прогноза.

Наиболее часто употребляемым методом построения прогнозирующей функции является метод наименьших квадратов.

Метод наименьших квадратов позволяет подобрать некоторую непрерывную аналитическую функцию для аппроксимации дискретного набора исходных данных. Выбор функции считается наилучшим, если сведено к минимуму стандартное отклонение по рассматриваемой временной выборке, которое определяется по формуле:

$$S_{dt} = \sqrt{\sum (d_t - d_t^*)^2 / (n - f)}, \quad (1)$$

где  $d_t$  - фактический спрос, наблюдаемый в  $t$ -й период (отрезок) времени;

$d_t^*$  - значение прогнозирующей функции для того же момента времени;

$n$  - число периодов (наблюдений), т.е. длина временной выборки;

$f$  - число степеней свободы.

Суммирование вводится по всей выборке, поэтому, как это принято в статистике, нижний и верхний индексы суммирования опущены.

Минимизация  $S_{dt}$  эквивалентна минимизации  $\sum (d_t - d_t^*)^2$ . Поэтому задача сводится к минимизации суммы квадратов разностей между фактическим значением

спроса в момент  $t$  и тем значением, которое принимает прогнозирующая функция.

Наиболее часто для построения прогнозирующей функции используют линейную функцию  $y = a_0 + a_1t$ , параболу  $y = a_0 + a_1t + a_2t^2$ , гиперболу  $y = a_0 + a_1/t$ ,

многочлены более высоких порядков.

Если предположить, что выбрана линейная форма прогнозирующей функции, т.е.  $y = a_0 + a_1t$ , то для определения исходно неизвестных параметров  $a_0$

и  $a_1$  необходимо минимизировать  $E = \sum (y_t - a_0 - a_1t)^2$ . Для этого определяют первые частные производные  $E$  по  $a_0$  и  $a_1$  и приравнивают их нулю, т.е. решают следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial E / \partial a_0 = \sum (y_t - a_0 - a_1t) = \sum y_t - na_0 - a_1 \sum t = 0; \\ \partial E / \partial a_1 = \sum (y_t - a_0 - a_1t)t = \sum ty_t - a_0 \sum t - a_1 \sum t^2 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

Откуда и получают искомые значения параметров  $a_0$  и  $a_1$ .

Аналогично получают параметры для гиперболы и параболы.

Поведение спроса часто носит циклический (периодический) характер. Тогда прогнозирующая функция может быть представлена в виде:

$$y = a + u \cos(2\pi / N)t + v \sin(2\pi / N)t, \quad (3)$$

где  $N$  – число периодов в одном цикле.

Суперпозиция линейной и циклической функции позволяет получить линейно–циклическую функцию:

$$y = a + bt + u \cos(2\pi / N)t + v \sin(2\pi / N)t. \quad (4)$$

При выборе прогнозирующей функции предпочтение отдается той аналитической форме, которая обеспечивает минимальное из стандартных отклонений как погрешность оценки аппроксимации. Поэтому, если нет уверенности, что тот или иной вид прогнозирующей функции заведомо предпочтительнее других, то следует испытать несколько различных форм прогнозирующей функции и выбрать наилучшую в соответствии с критерием минимизации стандартного отклонения.

Рассмотрим реализацию алгоритма построения прогноза методом статистического анализа на следующем примере.

Пусть известна статистика валового выпуска продукции  $Y$  (тыс. руб.) некоторого предприятия за 9 лет (табл.1).

Таблица 1

$Y$	22,4	25,8	26,1	26,9	27,4	25,7	28,3	27,6	28
$t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

1. Строится график (рис.1).

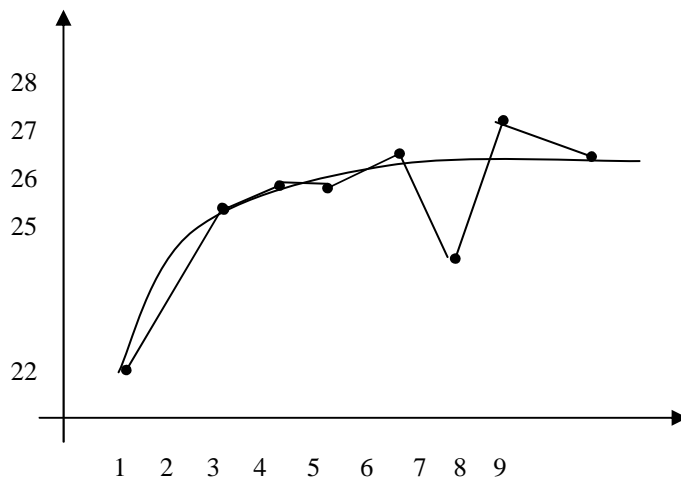


Рис. 1.

2. На основе визуального анализа графика делается вывод о форме аналитической кривой, способной наилучшим образом аппроксимировать ломаную на графике.

В данном случае такой кривой является парабола  $y = a_0 + a_1t + a_2t^2$ .

3. Для определения исходно неизвестных параметров параболы  $a_0$ ,  $a_1$ , и  $a_2$ , согласно методу наименьших квадратов, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0n + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 = \sum y; \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 = \sum yt; \\ a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 = \sum yt^2. \end{cases} \quad (5)$$

Расчеты коэффициентов в системе уравнений сводят в табл.2.

Таблица 2

$t$	$y$	$t^2$	$t^3$	$t^4$	$yt$	$yt^2$
1	22,4	1	1	1	22,4	22,4
2	25,8	4	8	16	51,6	103,2
3	26,1	9	27	81	78,3	234,9
4	26,9	16	64	256	107,6	430,4
5	27,4	25	125	625	137	685
6	25,7	36	216	1296	154,2	925,2
7	28,3	49	343	2401	198,1	1386,7
8	27,6	64	512	4096	220,8	1766,4
9	28	81	729	6561	252	2268
45	238,2	285	2025	15333	1222	7822,2

Тогда система уравнений (5) принимает вид:

$$\begin{cases} 9a_0 + 45a_1 + 285a_2 = 238,2; \\ 45a_0 + 285a_1 + 2025a_2 = 1222; \\ 285a_0 + 2025a_1 + 15333a_2 = 7822,2. \end{cases} \quad (6)$$

Решив эту систему уравнений, получаем:  $a_0=22,05$ ,  $a_1=1,52$ ,  $a_2=-0,100$ .

Прогнозирующее уравнение имеет вид:

$$y = 22,05 + 1,52t - 0,100t^2. \quad (7)$$

Прогноз осуществляется на основе экстраполяции значений прогнозирующей функции. Например, прогноз выпуска продукции на следующий (10-й) год при

предположении, что условия функционирования предприятия будут такими же, как в предшествующих периодах, составит  $y = 27,25$ .

#### **Литература:**

1. Абрамов Л.М, Капустин В.Ф. Математическое программирование. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.
2. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: ДИС, 1998.
3. Монахов А.В. Математические методы анализа экономики. – СПб: Питер, 2002.