УДК 517.2

Шарипов К.С.

ЫГУ им. К.Тыныстанова

К УКОРОЧЕННЫМ ЗАДАЧАМ УПРАВЛЕНИЯ, КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ И РЕШЕНИЯ ИХ МЕТОДАМИ ДОПОЛНЕНИЯ.

Впервые, введена классификация полной и неполной задачи Коши (и задачи управления, в частности, краевые задачи). Разработаны методы их решения.

Рассмотрим, в частности, линейное уравнение второго порядка вида:

$$y''+p_1(t)y'+p_2(t)y=q(t), \qquad t\in[t_0,T] \tag{1}$$

Здесь $p_1(t), p_2(t), q(t)\in C_{[t_0,T]}$

К нему задаем начальные условия вида

$$y(t_0)=y_0, \qquad y'(t_0)=y'_0 \tag{2}$$

Задача Коши имеет вид

$$y''+p_1(t)y'+p_2(t)y=q(t), \qquad t\in[t_0,T] \tag{3}$$

начальные условия (в полном составе)

$$y(t_0)=y_0, \qquad y'(t_0)=y'_0 \tag{4}$$

Постановка задачи.

Ранее было показано, что задача Коши (3)-(4) имеет решения

$$y=y(t,y_0,y'_0)\ , \qquad t\in[t_0,T] \tag{5}$$

Поставим задачу: Существует ли решение задачи Коши (3)-(4) , удовлетворяющее условию управления

$$y(T)=y_1? \tag{6}$$

В этом случае получим задачу управления вида

$$y''+p_1(t)y'+p_2(t)y=q(t), \qquad t\in[t_0,T] \tag{7}$$

Условия прогнозируемого управления

$$y(t_0)=y_0, \quad y'(t_0)=y'_0\ , \quad y(T)=y_1 \tag{8}$$

Видно, что начальное условие (4) входит в полном составе.

Введем следующие сообщения определения.

Определение 1. Задача управления, образованная посредством задачи Коши (3)-(4) называется полной задачей управления.

Определение 2. Задача управления, образованная уравнением (3), с неполными начальными условиями называется укороченной задачей управления.

Итак, задача управления (7)-(8) является полной. Отметим, что полная задача дает нам усовершенствованную задачу Коши [1] вида:

$$y''+p_1(t)y'+p_2(t)y=q(t), \qquad t\in[t_0,T] \tag{9}$$

1) начальные условия

$$y(t_0)=y_0, \quad y'(t_0)=y'_0 \tag{10}$$

2) условия управления

$$y(T)=y_1 \tag{11}$$

Неполные задачи управления

Теперь приведем задачу управления, образованную с неполным начальным условием, как краевую задачу вида:

$$y''+p_1(t)y'+p_2(t)y=q(t), \qquad t\in[t_0,T] \tag{12}$$

граничные условия

$$y(t_0)=y_0, \qquad y(T)=y_1 \tag{13}$$

Математический модель широкого класса практических задач описывается в данной краевой задаче.

Видно, что начальные условия (4) входят в неполном составе, т.е. отсутствует условие вида

$$y'(t_0) = y'_0 \qquad (14)$$

Поэтому, по определению 2 , задача управления (12)-(13) есть укороченная задача (по традиции она называется краевой задачей)

Итак, краевая задача (12)-(13) не дает нам усовершенствованную задачу Коши. Поэтому ее не можем исследовать аналогично как задачу (9)-(11).

Метод дополнения.

Нами разработан метод дополнения для исследования краевых задач вида (12)-(13).

Дополняя граничные условия (13) к условиям (14), приходим к задаче типа (7)-(8) вида:

$$y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = q(t), \qquad t \in [t_0, T] \qquad (15)$$

условие прогнозируемого управления

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = \Delta'_0, \quad y(T) = y_1 \; [y_0, \Delta_0, y_1 \in (-\infty, \infty)] \qquad (16)$$

Составим усовершенствованную задачу Коши

$$y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = q(t), \qquad t \in [t_0, T] \qquad (17)$$

1) начальные условия

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = \Delta'_0 \qquad (18)$$

2) условия прогнозируемого управления

$$y(T) = y_1 \qquad (19)$$

Задача Коши (17)-(18) имеет решение вида [5]:

$$y = y(t, y_0, \Delta'_0) \;, \quad t \in [t_0, T] \qquad (20)$$

Отсюда, согласно (19) , имеем

$$y(T, y_0, \Delta'_0) = y_1 \qquad (21)$$

Последнее равенство рассмотрим как алгебраическое уравнение в смысле: каково должно быть дополненное условие (14) Δ'_0 чтобы решение $y(t, y_0, y_1)$ задачи управления (12)-(13) выходящее при $t = t_0$ из точки $y(t_0)$, и в момент времени $t = T$, попадало в точку $y(T) = y_1$?

Пусть алгебраическое уравнение (21) имеет решение вида

$$\Delta'_0 = \eta(y_0, y_1) \;, \quad y_0 \in D_0, \quad y_1 \in D_1 \qquad (22)$$

Видно, что введенное условие (14) является функцией от граничных условий y_0 и y_1.

Подставляя (22) в (20) получим решение усовершенствованной задачи *Коши* (17)-(19) в виде

$$y = y(t, y_0, \eta(y_0, y_1)) \;, \quad t \in [t_0, T] \qquad (23)$$

Полученные функции (23) также являются решениями краевой задачи (12)-(13)!

В дальнейшем будем говорить, что формула (22) дает нам спектр собственных значений, а формула (23) дает нам собственные функции уравнения (12), соответствующие собственным значениям (22).

Теперь, исследуем *неоднородное* уравнение (1) в случае, когда известна его фундаментальная система $y_1(t)$ и $y_2(t)$ как решение однородного уравнения .

$$y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = 0, \qquad t \in [t_0, T] \qquad (24)$$

В этом случае общее решение неоднородного уравнения (1) имеет вид:

$$y = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)y_1(t) - y_1(s)y_2(t)}{y_2(t)y'_1(t) - y_1(t)y'_2(t)} q(s)ds, \qquad t \in [t_0, T] \qquad (25)$$

Отсюда, согласно (18), имеем

$$\begin{cases} C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) = y_0 \\ C_1 y'_1(t_1) + C_2 y'_2(t_0) = y'_0 \,(= \Delta_0 (c\grave{i}\ .14) \end{cases} \qquad (26)$$

Тогда коэффициенты C_1 и C_2 определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{y_1 y'_2 - y'_1\, y_2}(y_0 y'_2 - y'_0\, y_2) \\ C_2 &= \frac{1}{y_2 y'_1 - y'_2\, y_1}(y_0 y'_1 - y'_0\, y_1) \end{aligned} \right| \qquad (27)$$

Подставляя (27) в (25) имеем

$$y = \frac{y_0 y'_2 - y'_0\, y_2}{y_1 y'_2 - y'_1\, y_2} y_1(t) + \frac{y_0 y'_2 - y'_0\, y_1}{y_2 y'_1 - y'_2\, y_1} y_2(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s) y_1(t) - y_1(s) y_2(t)}{y_2(s) y'_1(s) - y_1(s) y'_2(s)} q(s) ds \qquad (28)$$

Отсюда, согласно (19) , имеем

$$\frac{y_0 y'_2 - y'_0\, y_2}{y_1 y'_2 - y'_1\, y_2} y_1(T) + \frac{y_0 y'_2 - y'_0\, y_1}{y_2 y'_1 - y'_2\, y_1} y_2(T) + \int_{t_0}^{T} \frac{y_2(s) y_1(T) - y_1(s) y_2(T)}{y_2(t_0) y'_1(t_0) - y_1(t_0) y'_2(t_0)} q(s) ds = y_1 \qquad (29)$$

Здесь, заданные граничные условия (13), считаются закрепленными. Раннее, по формуле (22), показали, что заданная пара (y_0, y_1) порождает свое начальное условие (14). Поэтому мы можем говорить о том , что выражение (29) будем рассматривать как алгебраическое уравнение относительно внешнего условия (14), т.е. относительно y'_0 .

$$y'_0 = d\, \frac{y'_2(T) y_1 - y'_1\, y_2}{y_2(T) y_1 - y_1(T) y_2} - + \int_{t_0}^{T} \frac{y_2(s) y_1(t) - y_1(s) y_2(t)}{y_2(T) y_1 - y_1(T) y_2} qsds - y_0 \frac{y_1(T) y'_2 - y'_1\, y_2(T)}{y_2(T) y_1 - y_1(T) y_2} \qquad (30)$$

Итак, видно, что кривая линия (28), выходящая из точки (t_0, y_0), чтобы попасть в точку (T, y_1) должна выходить из точки (t_0, y_0) со скоростью y'_0 значение которой определяется формулой (30).

Скорость определяется формулой (30), будем называть ее управляющей.

Отметим, что нами впервые, показано то, что нет необходимости решать краевую задачу (12)-(13), в частности, трудно построенной функцией Грина, вообще говоря, живущей в нашей фантазии.

Подтверждение этому видно, например, из следующей задачи прогнозируемого управления.

Рассмотрим задачу, управляемую функционалами.

Найти решение $y(t)$ краевой задачи (12)- (13) такое, что в точке $t = a \in (t_0, T)$ принимает заданное значение γ_1:

$$y(a) = \gamma_1 \qquad (31)$$

а также на ней определенный интеграл, в частности, вида :

$$\int_{t_0}^{T} y^2(t) dt$$

принимал заданное значение γ_2:

$$\int_{t_0}^{T} y^2(t) dt = \gamma_2 \qquad (32)$$

Итак, подставляя (30) в (28) получим решение задачи управления (17)-(19), которое так же является решением укороченной задачи (краевой задачи) (12)-(13)!

В этом случае усовершенствованная задача Коши имеет вид

$$y'' + p_1(t) y' + p_2(t) y = q(t), \qquad t \in [t_0, T] \qquad (33)$$

1) начальные условия

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \tag{34}$$

2)условие прогнозируемого управления

$$y(T) = y_1 \tag{35}$$

$$\begin{cases} y(a) = \gamma_1, (a \in (t_0, T)) \\ \int\limits_{t_0}^{T} y^2(t)dt = \gamma_2 \end{cases} \tag{36}$$

Найти кривую линию, которая в момент времени $t = t_0$ выходит из точки $y(t_0) = y_0$ и прежде чем в момент времени $t = T$ попадать в точку $y(T) = y_1$, она должна удовлетворить условиям (36).

Итак, неполные задачи для дифференциальных уравнений предлагаем исследовать сведением (методом дополнения) к полным задачам.

Отметим, что краевая задача (1)-(2) дает нам полную краевую задачу.

Литература:

1.Шарипов С., Шарипов К.С. Управление решения дифференциального и интегрального уравнений. //Вестник ИГУ, - Каракол; - № 12, 2004.