УДК 532.546+518.5

Мурзакматов М.У., Байболотов Б.А.

ЫГУ им. К.Тыныстанова,

МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВОДОПРОВОДИМОСТИ ПЛАСТОВ

Приводятся алгоритмы двух методов идентификации водопроводимости водоносных горизонтов и сравниваются результаты решения тестовой задачи.

Для достоверного описания процесса фильтрации подземных вод необходимо привести в соответствие математическую модель изучаемому объекту. В существующих методах моделирования все еще отсутствуют эффективные подходы идентификации основных гидрогеологических параметров пористых сред. Из-за недостаточности информации исследователи вынуждены использовать в математических моделях не совсем достоверные, а в действительности грубо осредненные значения этих параметров.

В зависимости от степени изученности области фильтрации в некоторых точках могут задаваться значения напорной функции $H(x,y)$, коэффициента фильтрации $k(x,y)$, водопроводимости $T(x,y)$, упругой водоотдачи $\mu(x,y)$ и инфильтрации $f(x,y)$. По этим неполным данным необходимо восстановить картину течения жидкости, т.е. идентифицировать фильтрационный поток.

Пусть в области фильтрации заданы значения напора и водопроводимости

$$H(x_i, y_i) = H_i^Э, \quad (x_i, y_i) \in R_q, \quad i = 1, 2, \dots, q, \tag{1}$$

$$T(x_i, y_i) = T_i^Э, \quad (x_i, y_i) \in S_p, \quad i = 1, 2, \dots, p, \tag{2}$$

где $H_i^Э$, $T_i^Э$ – значения указанных величин, полученные из эксперимента или путем наблюдений; R_q и S_p – некоторые дискретные множества, состоящие из q и p точек соответственно. Требуется доопределить значения напоров и водопроводимости в области фильтрации D, где заданы множества R_q и S_p, считая остальные параметры потока известными. Такая задача рассматривалась в работе [1].

В стационаром случае плановый фильтрационный поток описывается уравнением

$$LH = f, \quad (x, y) \in D \tag{3}$$

с краевым условием

$$lH = \alpha, \quad (x, y) \in \Gamma = \partial D. \tag{4}$$

Здесь

$$\mathrm{L} = -\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(T\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\right) - \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(T\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\right) + Q, \quad l = T\frac{\partial}{\partial \mathrm{n}} - \beta,$$

$H = H(x, y)$ – функция напора, *м*; $T = T(x, y)$ – водопроводимость водоносного пласта, *м²/сут*; $Q = Q(x,y)$ – функция, учитывающая переток из ниже– и вышележащих пластов, *м/сут*; $f = f(x, y)$ – функция источников и стоков, *м/сут*; $\alpha = \alpha(x, y)$, *м²/сут* и $\beta = \beta(x, y)$, *м/сут* – заданные функции, D – область фильтрации в плане, Γ – ее граница, $\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали к границе области.

К задаче идентификации водопроводимости можно использовать различные подходы. Мы рассмотрим два из них.

1. Этот подход основан на методе регуляризации А.Н. Тихонова [2, 3]. Задача сводится к нахождению функции $T(x,y)$ из уравнений (3), (4), сообщающей в области D минимум функционалу

$$\Phi(T) = \sum_{i=1}^{q}\left[H_i(T) - H_i^Э\right]^2 + \sum_{j=1}^{p}\left(T_j - T_j^Э\right)^2 + \gamma\,|\,\delta T\,|^2. \tag{5}$$

Здесь $H_i(T)$ – расчетные значения напоров, которые находятся как решение задачи (3), (4); γ – параметр регуляризации.

Для определения поля функции $T(x, y)$ мы, наряду с количественной информацией (1), (2) используем также качественную информацию об искомой функции – функционал $\Phi(T)$ требует, чтобы функция $T(x, y)$ была гладкой.

Теперь займемся минимизацией функционала (5). При каждом наборе значений функции $T(x,y)$ получаем вполне определенные значения функции $H(x,y)$, т. е. имеем оператор $H(T)$, определенный алгоритмически по формулам метода конечных элементов. Этот оператор в общем случае является нелинейным. Линеаризуем его следующим образом

$$H(T) = H(\tilde{T}) + \sum_{s=1}^{n} (T_s - \tilde{T}_s) \frac{\partial H}{\partial T_s} + R_2(\Delta T), \tag{6}$$

где $\tilde{T}_s$ – значение функции T в точке (x_s, y_s), полученное в предыдущей итерации; $R_2(\Delta T)$ – остаточный член разложения. Подставляя (6) в (5) и используя необходимое условие минимума функции многих переменных, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \Phi(T)}{\partial T_k} = \sum_{i=1}^{q} \left[\tilde{H}_i + \sum_{s=1}^{n} (T_s - \tilde{T}_s) \frac{\partial H_i}{\partial T_s} - H_i^{э} \right] \frac{\partial H_i}{\partial T_k} + \mu_k (T_k - T_k^{э}) + \gamma (T_k - \tilde{T}_k) = 0, \quad k = 1,2,\ldots,n,$$

или

$$\sum_{s=1}^{n} c_{ks} T_s = d_k, \quad k = 1,2,\ldots,n \tag{7}$$

с коэффициентами

$$c_{ks} = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial H_i}{\partial T_s} \frac{\partial H_i}{\partial T_k}, \quad k \neq s, \qquad c_{kk} = \sum_{i=1}^{q} \left(\frac{\partial H_i}{\partial T_k} \right)^2 + \gamma + \mu_k$$

и с правыми частями

$$d_k = \sum_{i=1}^{q} \left(H_i^{э} - \tilde{H}_i + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H_i}{\partial T_s} \tilde{T}_s \right) \frac{\partial H_i}{\partial T_k} + \mu_k T_k^{э} + \gamma \tilde{T}_k .$$

Здесь

$$\mu_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad T^{э} \quad \text{задано,} \\ 0, & \text{если} \quad T^{э} \quad \text{не задано.} \end{cases}$$

Вычислительная процедура осуществляется в следующем порядке. Используя начальные значения $H_{min}^{Э} \leq H_i^{(0)} \leq H_{max}^{Э}$, $T_{min}^{Э} \leq T_i^{(0)} \leq T_{max}^{Э}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в качестве нулевого приближения, решается задача (3), (4) и определяется первое приближение $H^{(1)}$. Затем, придавая приращение ΔT функции $T(x, y)$, находим второе приближение $H^{(2)}$. Это дает возможность приближенно определить производную $\partial H/\partial T$ и решить систему (7) при некотором значении параметра регуляризации γ. Найденные значения $T(x,y)$ используются для определения следующего приближения H. Этот процесс продолжается до установления фильтрационного потока, т.е. до выполнения условия. Если при этом полученные значения напоров в пределах допустимых погрешностей не совпадут с данными экспериментальными значениями $H^{Э}$, то итерация продолжается по параметру регуляризации γ, выбор которого может быть осуществлен методом невязок [2].

2. В последнее время на основе теории малых возмущений и теории сопряженных функций разработаны алгоритмы для идентификационных задач теории фильтрации [3]. Теория возмущений основана на возможности приближенного описания исследуемого объекта с помощью адекватной математической модели, допускающей корректное и полное изучение. Подвергая параметры модели виртуальным возмущениям, получаем дифференциальные уравнения относительно вариаций искомых параметров. Определив эти вариации с помощью каких – либо регуляризирующих алгоритмов, мы после каждой итерации уточняем значения искомых параметров.

Согласно [3], идентификация водопроводимости $T(x,y)$ проводится в следующей последовательности.

Образуем начальное приближение искомой функции $T_i^{(0)}$, где $\min_i T_i^Э \le T_i^{(0)} \le \max_i T_i^Э$, $i = 1, 2, \dots, n$ и составим функцию $T_n^{(0)}(x, y)$ по формуле (5). Решив краевую задачу (3), (4) с функцией $T_n^{(0)}(x, y)$, находим начальное приближение напорной функции $H_n^{(0)}(x, y)$.

Пусть теперь правые части уравнения (3) и краевого условия (4) получают малые возмущения δf и $\delta\alpha$ соответственно. Тогда задача (3), (4) переходит к задаче

$$LH' = f', \quad H' = H + \delta H, \quad f' = f + \delta f \quad (x, y) \in D, \tag{8}$$

$$lH' = \alpha', \quad \alpha' = \alpha + \delta\alpha, \quad (x, y) \in \Gamma. \tag{9}$$

Из (8) и (9) с учетом (3) и (4) приходим к краевой задаче относительно вариации δH:

$$L\delta H = \delta f, \ (x, y) \in D; \quad l\delta H = \delta\alpha, \ (x, y) \in \Gamma. \tag{10}$$

Задача (10) при известных вариациях δf и $\delta\alpha$ позволяет построить поле вариаций напоров δH.

Решив задачу (10) при той же функции $T_n^{(0)}(x, y)$ и заданных функциях $\delta f(x, y)$ и $\delta\alpha(x, y)$, находим вариацию напорной функции $\delta H(x, y)$ и образуем в функцию

$$H'(x, y) = H^{(0)}(x, y) + \delta H(x, y).$$

Теперь рассмотрим случай, когда малые возмущения получают не только правые части уравнений (3) и (4), но и их коэффициенты $T(x, y)$, $Q(x, y)$ и $\beta(x, y)$. Это равносильно изменению гидрогеологических характеристик пласта. Пусть вместо задачи (3), (4) имеем краевую задачу

$$L'H' = f'', \quad L' = L + \delta L, \quad f'' = f' + \delta f' \qquad (x, y) \in D, \tag{11}$$

$$l'H' = \alpha'', \quad l' = l + \delta l, \quad \alpha'' = \alpha' + \delta\alpha', \qquad (x, y) \in \Gamma, \tag{12}$$

где

$$.\ \delta L = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta T \frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta T \frac{\partial}{\partial y}\right) + \delta Q, \quad \delta l = \delta T \frac{\partial}{\partial n} - \delta\beta.$$

Из (11), (12) с учетом (8), (9) получаем краевую задачу

$$\delta L H' = \delta f', \ (x, y) \in D; \quad \delta l H' = \delta\alpha', \ (x, y) \in \Gamma. \tag{13}$$

Поскольку функция $H'(x, y)$ известна, отсюда получаем уравнение относительно вариации искомой функции $\delta T(x, y)$. Решение задачи (13) ищем в виде

$$\delta T(x, y) \approx \delta T_n(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \delta T_j N_j(x, y). \tag{14}$$

Применяя обобщенный принцип Галеркина к задаче (14), имеем

$$\iint_D N_i(\delta L H' - \delta f')\, d\sigma + \int_\Gamma N_i(\delta l H' - \delta\alpha')\, ds = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Подставляя вместо δT ее разложение (14) и используя формулу Грина, приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно δT_j:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\iint_D N_j q(N_i, H')\, d\sigma\right)\delta T_j = \iint_D N_i \delta f'\, d\sigma - \iint_D N_i H' \delta Q\, d\sigma - \int_\Gamma N_i (H'\delta\beta - \delta\alpha')\, ds, \tag{15}$$

$i = 1, 2, \dots, n$.

Система (15) является плохо обусловленной, так как функция $q(N_i, H')$ не обеспечивает системе диагонального преобладания и ее определитель близок к нулю. Поэтому мы также используем субъективную информацию о гладкости искомой функции, другими словами, потребуем, чтобы ее вариация была близка к нулю. Тогда система (15) примет вид

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\iint_D N_j q(N_i,\mathrm{H}')d\sigma\right)\delta T_j+\mu\iint_D N_i\delta T_n d\sigma+\gamma\sum_{s=1}^{p}(\delta T_s-T_s^{э}+\tilde{T}_s)=$$
$$=\iint_D N_i\delta f' d\sigma-\iint_D N_i\mathrm{H}'\delta Q\, d\sigma-\int_\Gamma N_i(\mathrm{H}'\delta\beta-\delta\alpha')ds,\qquad i=1,2,\ldots,n, \tag{16}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta T_j = f_i\ ,\ \ i=1,\ 2,\ldots,\ n, \tag{17}$$

где

$$a_{ij}=\iint_D N_j q(N_j,\mathrm{H}')d\sigma+\mu\iint_D N_i N_j d\sigma+\gamma_j\,,$$

$$f_i=\iint_D N_i\delta f' d\sigma-\iint_D N_i\mathrm{H}'\delta Q\, d\sigma-\int_\Gamma N_i(\mathrm{H}'\delta\beta-\delta\alpha')ds+\gamma_i(T_i^{э}-\tilde{T}_i),$$

$$\gamma_s=\begin{cases}1, & \text{если}\quad T_s^{э}\ \text{задано},\\ 0, & \text{если}\quad T_s^{э}\ \text{не задано},\end{cases}\qquad s=i,\ j,\ k,$$

μ – положительное число, выполняющее роль параметра регуляризации; $\tilde{T}$ – значение T из предыдущей итерации.

Работа алгоритмов рассмотренных методов апробирована на серии тестовых примеров. Рассмотрим один из них. В круге $x^2+\ y^2\ \le\ 0.25$ решается задача (3), (4) с внутренними условиями (1), (2) (в методе возмущений условие (1) вообще не используется). Круг разделен на 54 элемента, число узлов сетки – 37, из них 18 – граничных. Элементами являются равносторонние треугольники со стороной, равной 0.2. В этой области заданы функции $H(x,\ y)\ =\ x^2+y^2+5$, $Q(x,\ y)\ =\ 0$, $f(x,\ y)\ =\ -40(2x^2+2y^2+1)$. Искомой функцией является $T(x,\ y)\ =\ 10(x^2+y^2+1)$. Числа q и p в условиях (1) и (2) (т.е. число узлов, в которых известны экспериментальные (точные) значения функций H и T соответственно) задавались в различных сочетаниях (см. табл. 1).

В табл.1 сравниваются максимальные относительные погрешности, полученные при определении функции $T(x,y)$ перечисленными выше методами. Задача идентификации с использованием методов регуляризации и малых возмущений является устойчивой процедурой, что очень важно при проведении гидрогеологических расчетов в реальных условиях. Но следует отметить, что метод регуляризации требует большого количества вычислений, пропорциональных количеству узлов сетки.

Относительные погрешности в определении водопроводимости различными методами (в процентах)

Таблица 1

q	p	Метод регуляризации	Метод возмущений
17	17	6.3	7.1
17	13	9.6	7.4
13	17	10.4	7.3
13	7	11.2	8.5
7	13	10.6	7.7
7	4	12.3	8.6
4	7	9.1	8.7
4	4	12.7	9.3

Рассмотренные в работе методы идентификации водопроводимости дают вполне приемлемые для практики результаты и они могут применяться в гидрогеологических расчетах.

Литература:

1. Джаныбеков Ч. Моделирование гидрогеодинамических процессов с приме-нением

ЭВМ. – Фрунзе: Илим, 1989. – 183 с.

2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 233 с.

3. Джаныбеков Ч., Мурзакматов М.У. Методы идентификации гидрогеологических параметров и прогнозирования процессов загрязнения подземных вод. – Бишкек: Илим, 2005. – 180 с.