

УДК 531 (575.2) (04)

## ПОПЕРЕЧНЫЙ УДАР УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ ПО ПЛАСТИНЕ

*В.Э. Еремынц* – докт. техн. наук,  
*А.А. Слепнев* – аспирант

A problem was solved concerning transverse impact against a plate by an elastic rod. Using linearization of the rod and the plate contact features the formulae were obtained determining the interaction of contact force and stress in the rod with characteristics of the rod and the plate.

При виброударной очистке пластин из-за вибраций машины часто возникают ситуации, когда ее боек наносит удар по инструменту, не прижатому к поверхности пластины. В этом случае после удара инструмент приобретает определенную скорость и, двигаясь в направлении пластины, наносит по ней удар.

При проектировании виброударных машин для очистки поверхностей важно знать динамические напряжения, возникающие в инструменте и пластине при таком ударе и величину контактной силы, чтобы обеспечить прочность инструмента и не повредить поверхность пластины. Для этого необходимо решить задачу о поперечном ударе упругим стержнем по пластине, которая ранее не решалась.

При разработке расчетной модели рассматриваемой системы принималось, что инструмент представляет собой гладкий упругий стержень диаметром  $d$  и длиной  $L$  со сферическим торцом радиуса  $R$ , контактирующим с пластиной толщиной  $\delta$  (рис. 1а). Пластина имеет достаточно большие размеры в плане, такие, что волны, отраженные от краев пластины, не оказывают влияния на взаимодействие стержня с пластиной на рассматриваемом интервале времени.

Движение сечений стержня описывалось одномерным волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

где  $u = u(z, t)$  – перемещение сечений стержня;  $z$  – координата сечения;  $t$  – время;  $a$  – скорость распространения продольной волны деформации в стержне.

Решение волнового уравнения отыскивалось в форме Даламбера с учетом начального движения стержня:

$$u(z, t) = V_0 t + f_i(at - z) + \varphi_i(at + z), \quad (1)$$

где  $f_i(at - z)$ ,  $\varphi_i(at + z)$  – функции, описывающие перемещение сечений в волнах деформаций, распространяющихся соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси  $z$ .

Колебания пластины описывались уравнением:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P_k(t),$$

где  $w = w(x, y, t)$  прогиб пластины;  $x, y$  – координаты точек срединной плоскости пластины, отсчитываемые от ее угла;  $\nabla^2$  – бигармонический оператор Лапласа;  $P_k(t)$  – усилие, действующее в контакте стержня и пластины;  $D$  – цилиндрическая жесткость пластины,

$$D = E\delta^3/12(1-\mu^2);$$

$m_0$  – масса одного квадратного метра пластины,

$$m_0 = \rho\delta;$$

$E, \mu, \rho$  – соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала пластины. В дальнейшем предполагалось, что величины  $E, \mu, \rho$  для материалов стержня и пластины одинаковы.

Решением уравнения движения пластины до прихода к точке контакта стержня с пластиной волн деформаций, отраженных от краев пластины, является функция [1]:

$$w = -\frac{1}{8\sqrt{Dm_0}} \int_0^t P_k(t) dt. \quad (2)$$

Знак минус в последнем выражении принят потому, что сила, действующая на пластину, противоположна силе, действующей на стержень.

Граничные условия в контакте стержня и пластины (в сечении стержня  $z = 0$ ) записывались в виде:

$$EF \frac{\partial u}{\partial z}(0, t) + P_k = 0, \quad (3)$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения стержня;  $E$  – модуль упругости его материала;  $P_k$  – контактная сила, определяемая по формуле Герца:

$$P_k = K\alpha^{3/2}, \quad (4)$$

$\alpha$  – величина местной контактной деформации:

$$\alpha = u(0, t) - w(x_0, y_0, t), \quad (5)$$

$x_0, y_0$  – координаты точки контакта стержня с пластиной.

При сферическом торце стержня и плоской поверхности пластины:

$$K = \frac{2E}{3(1-\mu^2)} \sqrt{R}.$$

Граничные условия на свободном торце стержня (в сечении с координатой  $z = -L$ ):

$$EF \frac{\partial u}{\partial z}(-L, t) = 0. \quad (6)$$

В работе [2] показано, что эффективным способом упрощения математической модели рассматриваемой системы является линеаризация контактной характеристики (4) методом Бидермана. В соответствии с этим методом нелинейная контактная характеристика (рис. 1б) заменяется кусочно-линейной вида [3]:

$$P_k = 0, \text{ при } \alpha < \alpha_0,$$

$$P_k = c(\alpha - \alpha_0) \text{ при } \alpha_0 < \alpha < \alpha_m.$$

где  $c, \alpha_0$  – коэффициенты, определяемые из условия равенства максимальных деформаций и потенциальных энергий деформаций в линейной и нелинейной моделях:

$$c = 1,25K^{2/3}P_{km}^{1/3},$$

$$\alpha_0 = 0,2\alpha_m = 0,2(P_{km}/K)^{2/3}.$$

После линеаризации контактной характеристики граничные условия в контакте стержня с пластиной (3) примут вид:

$$EF \frac{\partial u}{\partial z}(0, t) + c[u(0, t) - w(t) - \alpha_0] = 0, \quad (7)$$

где  $w(t)$  – прогиб пластины в точке контакта со стержнем.

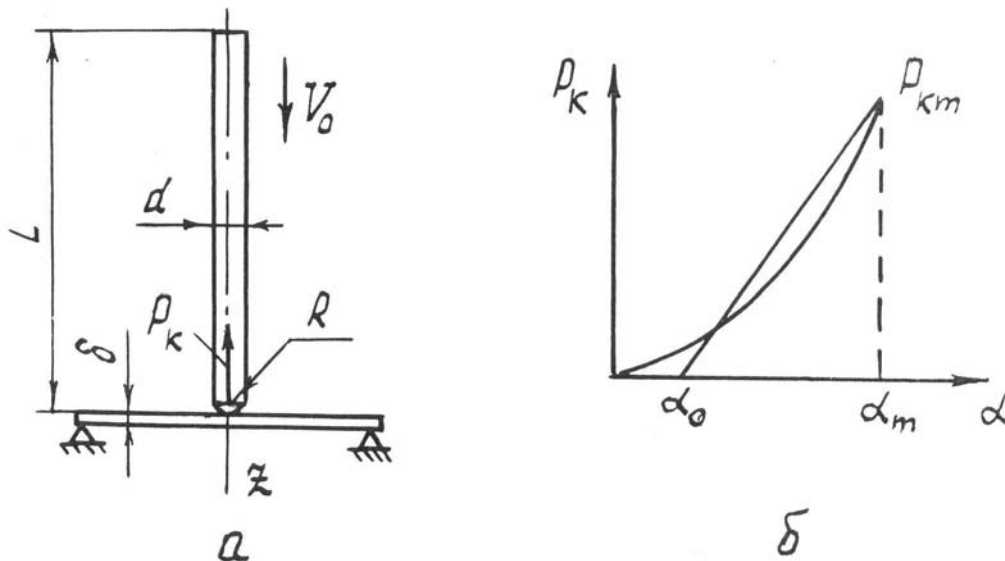


Рис. 1. Расчетная схема ударной системы (а), контактная характеристика и ее линейная аппроксимация (б).

Дифференцируя уравнение (7) по времени, запишем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + \frac{c}{EF} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t} \right] = 0. \tag{8}$$

Из соотношения (2) следует:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{EF}{8\sqrt{Dm_0}} \cdot \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (8), получим граничное условие в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + \frac{c}{EF} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{8\sqrt{Dm_0}} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{9}$$

Вычисляя производные функции (1), подставляя их в граничное условие (9) при  $z = 0$  и обозначая  $at = \xi$ ,  $f_i'(\xi) = \Phi_i(\xi)$ ,  $\varphi_i'(\xi) = \Psi_i(\xi)$ , приходим к уравнению:

$$\Psi_i'(\xi) + s\Psi_i(\xi) = \Phi_i'(\xi) + (\beta - b)\Phi_i(\xi) - \frac{b}{a}V_0, \tag{10}$$

где  $s = \beta + b$ ,  $b = \frac{c}{EF}$ ,  $\beta = \frac{c}{8a\sqrt{Dm_0}}$ .

Между коэффициентами  $b$  и  $\beta$  существует следующая взаимосвязь:

$$\beta = b\chi v^2, \text{ где } \chi = \frac{\pi}{16}\sqrt{3(1-\mu^2)}, \quad v = \frac{d}{\delta}. \tag{11}$$

Для стали с коэффициентом Пуассона, равным 0,3, можно принять:  $\chi = 0,3244$ .

Уравнение (10) является основным уравнением процесса взаимодействия стержня с пластиной. Оно связывает параметры волн деформации, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлении оси  $z$ .

Из этого уравнения при известной функции  $\Phi_i(\xi)$ , описывающей волну, распространяющуюся по стержню к пластине, можно найти функцию  $\Psi_i(\xi)$ , описывающую волну, отраженную от пластины. Зная эту функцию можно определить усилие в отраженной волне:

$$P_{oi}(z, t) = EF\Psi_i(at + z), \quad (12)$$

усилие в контактном сечении стержня и пластины:

$$P_{ki}(t) = EF[-\Phi_i(at) + \Psi_i(at)], \quad (13)$$

а затем по формуле (2) найти прогиб пластины в точке контакта со стержнем.

Волна, возникшая в контактном сечении стержня и пластины, распространяясь по стержню, достигает его свободного торца и отражается от него с обратным знаком. Из граничного условия (6) после подстановки в него решения (1) следует:

$$\Phi_{i+1}(\xi) = \Psi_i(\xi - 2L). \quad (14)$$

где  $\xi = at$ .

Таким образом, функция  $\Phi_{i+1}$ , описывающая волну, отраженную от свободного торца стержня, имеет вид функции  $\Psi_i$ , но с аргументом на  $2L$  меньшим. Подставляя эту функцию в правую часть уравнения (10) и решая его, можно найти вид функции  $\Psi_{i+1}$ , а затем и параметры ударного процесса в  $(i+1)$ -м периоде колебания стержня.

Таков общий порядок решения задачи. Перейдем к определению параметров волн деформаций, возникающих в стержне при ударе.

В начальный момент соударения стержня с пластиной волн, распространяющихся по стержню в положительном направлении оси  $z$ , нет. При этом  $\Phi_1(\xi) = 0$ ,  $\Phi_1'(\xi) = 0$  и уравнение (10) принимает вид:

$$\Psi_1'(\xi) + s\Psi_1(\xi) = -\frac{b}{a}V_0. \quad (15)$$

Его общим решением при начальном условии  $\frac{\partial u}{\partial t}(0, 0) = V_0$  является функция:

$$\Psi_1(\xi) = -A_1(1 - e^{-s\xi}), \quad (16)$$

где  $\xi = at + z$ ,  $A_1 = \frac{V_0}{a(\chi v^2 + 1)}$ .

Подставляя функцию (16) в соотношения (12) и (13) найдем усилия в волне, отраженной от пластины, и усилия в контакте стержня с пластиной. В данном случае при  $\Phi_1(at) = 0$  эти усилия одинаковы и равны:

$$P_{oi}(z, t) = P_{ki}(t) = -P_0(1 - e^{-s\xi}), \quad (17)$$

где  $\xi = at + z$  – для волны, отраженной от пластины;  $\xi = at$  – для контактном сечении стержня с пластиной;

$$P_0 = \frac{\rho a F V_0}{\chi v^2 + 1}. \quad (18)$$

Функция  $\Phi_2(\xi)$ , описывающая волну, отраженную от свободного торца стержня при действии на него волны  $\Psi_1(\xi)$ , в соответствии с соотношением (14) имеет вид:

$$\Phi_2(\xi) = -A_1(1 - e^{-s(\xi - 2L)}). \quad (19)$$

Подставляя эту функцию в правую часть уравнения (10) получим уравнение для нахождения функции  $\Psi_2(\xi)$ , описывающей волну, отраженную от пластины на интервале времени  $2L/a < t < 4L/a$ :

$$\Psi_2'(\xi) + s\Psi_2(\xi) = -A_1[2be^{-s(\xi - 2L)} + s(1 + q)], \quad (20)$$

где  $q = \frac{\beta - b}{\beta + b} = \frac{\chi v^2 - 1}{\chi v^2 + 1}$ .

Общее решение этого уравнения при начальных условиях, вытекающих из неразрывности функции  $P_k(t)$ :

$$\Psi_1(2L) = -\Phi_2(2L) + \Psi_2(2L),$$

имеет вид:

$$\Psi_2(\xi) = A_1 \left[ e^{-s\xi} + (q - 2b(\xi - 2L))e^{-s(\xi - 2L)} - (1 + q) \right], \quad (21)$$

где  $\xi = at + z$ .

Изменение усилий во второй волне, отраженной от пластины, описывается формулой (12), а изменение усилий в контакте стержня с пластиной на интервале времени  $2L/a < t < 4L/a$  определится как

$$P_{k2} = -P_0 \left\{ q - e^{-s\xi} + (1 - q)[1 + s(\xi - 2L)]e^{-s(\xi - 2L)} \right\}, \quad (22)$$

где  $\xi = at$ .

Продолжая решение задачи аналогично предыдущему, найдем:

$$\begin{aligned} \Psi_3(\xi) = A_1 \left\{ -(1 + q + q^2) + e^{-s\xi} + [q - 2b(\xi - 2L)]e^{-s(\xi - 2L)} + \right. \\ \left. + (q^2 - 2b[(1 + q)(\xi - 4L) - b(\xi - 4L)^2])e^{-s(\xi - 4L)} \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Psi_4(\xi) = A_1 \left\{ -(1 + q + q^2 + q^3) + e^{-s\xi} + [q - 2b(\xi - 2L)]e^{-s(\xi - 2L)} + \right. \\ \left. + [q^2 - 2b(1 + q)(\xi - 4L) + 2b^2(\xi - 4L)^2]e^{-s(\xi - 4L)} + \right. \\ \left. + [q^3 - 2b(1 + q + q^2)(\xi - 6L) + 2b^2(2 + q)(\xi - 6L)^2 - \right. \\ \left. - \frac{4b^3}{3}(\xi - 6L)^3]e^{-s(\xi - 6L)} \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

В дальнейшем для упрощения записи формул введем безразмерное время:

$$\tau = t/T,$$

где  $T$  – период собственных колебаний стержня: ( $T = 2L/a$ ), и обозначим  $p = 2Ls$ .

С учетом этого, формулы для определения усилий в контактном сечении стержня с пластиной примут вид:

$0 < \tau < 1$

$$P_{k1} = -P_0(1 - e^{-p\tau}); \quad (25)$$

$1 < \tau < 2$

$$P_{k2} = -P_0 \left\{ q - e^{-p\tau} + (1 - q)[1 + p(\tau - 1)]e^{-p(\tau - 1)} \right\}; \quad (26)$$

$2 < \tau < 3$

$$\begin{aligned} P_{k3} = -P_0 \left\{ q^2 - e^{-p\tau} + (1 - q)[1 + p(\tau - 1)]e^{-p(\tau - 1)} + \right. \\ \left. + q(1 - q)[1 + p(\tau - 2)]e^{-p(\tau - 2)} - (1 - q)^2 \frac{p^2}{2}(\tau - 2)^2 e^{-p(\tau - 2)} \right\}; \end{aligned} \quad (27)$$

$3 < \tau < 4$

$$\begin{aligned} P_{k4} = -P_0 \left\{ q^3 - e^{-p\tau} + (1 - q)[1 + p(\tau - 1)]e^{-p(\tau - 1)} + \right. \\ \left. + q(1 - q)[1 + p(\tau - 2)]e^{-p(\tau - 2)} - (1 - q)^2 \frac{p^2}{2}(\tau - 2)^2 e^{-p(\tau - 2)} + \right. \\ \left. + q^2(1 - q)[1 + p(\tau - 3)]e^{-p(\tau - 3)} - (1 - q)^2 \left[ (1 + q) \frac{p^2}{2}(\tau - 3)^2 - (1 - q) \frac{p^3}{6}(\tau - 3)^3 \right] e^{-p(\tau - 3)} \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

На рис. 2 в качестве примера показаны диаграммы изменения усилий в контактном сечении стержня с пластиной, рассчитанные по формулам (25)–(28) при различных значениях параметра  $\nu$  и постоянных значениях остальных параметров, равных:

$$d = 40 \text{ мм}, R = 80 \text{ мм}, E = 20,4 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \rho = 7850 \text{ кг/м}^3, a = 5100 \text{ м/с}.$$

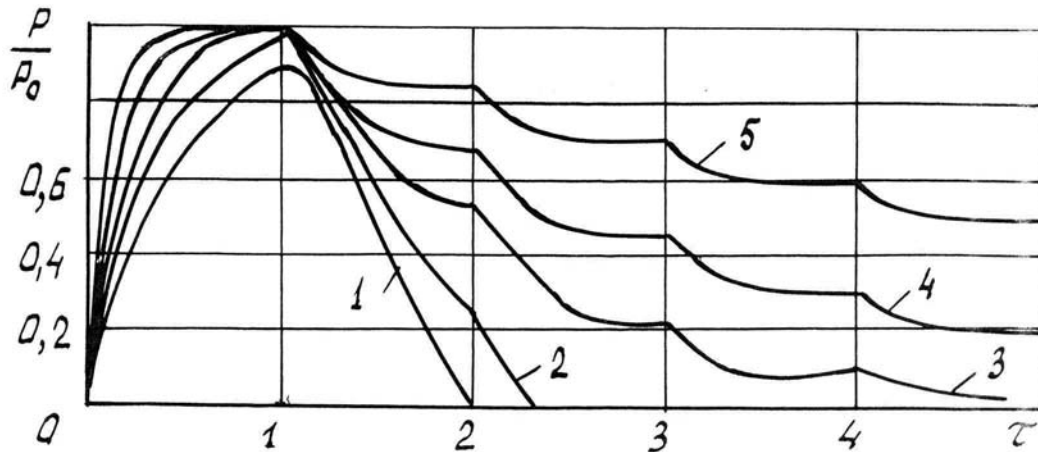


Рис. 2. Диаграммы зависимости контактных усилий от времени при различных значениях  $\nu$ , равных: 1–1,0; 2–2,0; 3–3,0; 4–4,0; 5–6,0.

Диаграммы показывают, что во всех случаях контактные усилия достигают максимального значения в конце первого периода собственных колебаний стержня, когда  $\tau = 1$ . При этом если значение параметра  $p$  больше 4,6, то максимальные контактные усилия отличаются от усилий  $P_0$  менее чем на 1%. В этих случаях можно принять  $P_{km} = P_0$ .

Напряжения в поперечных сечениях стержня достигают максимального значения вблизи контактного сечения и с учетом соотношения (18) определяются формулой:

$$\sigma_m = \frac{\rho a V_0}{1 + \chi \nu^2}. \quad (29)$$

Из нее следует, что максимальные напряжения в сечениях стержня прямо пропорциональны его акустическому сопротивлению  $\rho a$ , скорости удара  $V_0$  и обратно пропорциональны квадрату параметра  $\nu$ .

В качестве примера на рис. 3 приведены графики зависимостей напряжений в сечениях волновода от параметра  $\nu$  и контактных усилий от диаметра стержня, построенные по формулам (18), (29) при скорости удара  $V_0 = 10 \text{ м/с}$ .

Из графиков видно, что напряжения в сечениях стержня с увеличением параметра  $\nu$  уменьшаются. Если принять, что допускаемые напряжения в стержне равны 250 МПа, то из диаграммы  $\sigma(\nu)$  (рис. 3а) можно найти, что при скорости удара 10 м/с напряжения в стержне не будут превышать допускаемых при любых значениях  $\nu$ , больших двух. Это условие на практике всегда выполняется.

Увеличение диаметра стержня приводит к возрастанию контактной силы (рис. 3б), причем это возрастание тем интенсивнее, чем больше толщина пластины.

Из соотношений (18), (29) вытекает важный вывод о том, что при выполнении условия  $p > 4,6$  максимальные контактные усилия и напряжения в стержне можно считать не зависящими от приведенного коэффициента контактной жесткости  $c$ .

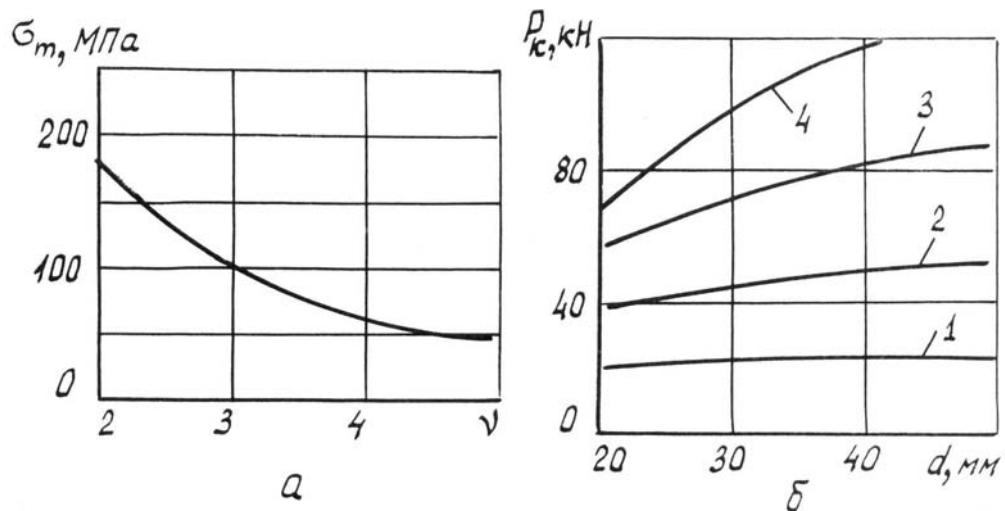


Рис. 3. Диаграммы зависимостей максимальных напряжений в стержне от параметра  $\nu$  (а) и максимальной контактной силы от диаметра стержня (б) при различной толщине пластины, равной: 1–5 мм; 2–7,5 мм; 3–10 мм; 4–12,5 мм; 5–15 мм.

В этом случае сразу вначале расчета по формуле (18) может быть найдена максимальная контактная сила  $P_{km}$  и коэффициент контактной жесткости  $c$ . Затем можно найти коэффициент  $b$  и оценить величину  $p$  по формуле:  $p = 2Lc(1 + \chi\nu^2)/EF$ . Если она удовлетворяет условию  $p > 4,6$ , то полученные значения максимальной силы и коэффициента контактной жесткости являются достоверными. Если не удовлетворяет, то расчет максимальной контактной силы необходимо проводить по формуле (25).

Следует отметить, что значение коэффициента  $c$  слабо зависит от радиуса сферы контактного торца волновода. Расчеты показывают, что при увеличении этого радиуса вдвое коэффициент жесткости  $c$  возрастает всего на 26%.

В существующих конструкциях машин диаметр инструмента обычно составляет от 25 до 40 мм при толщине обрабатываемых пластин от 5 до 10 мм. При таких размерах элементов ударной системы и длине инструмента большей 0,25 м коэффициент  $p$  лежит в пределах от 8 до 20. В этом случае в формулах (25)–(28) можно пренебречь членами, относящимися к волнам предшествующего периода колебаний, и записать эти формулы в более простом виде:

$$0 < \tau < 1$$

$$P_{k1} = -P_0(1 - e^{-p\tau}); \tag{30}$$

$$1 < \tau < 2$$

$$P_{k2} = -P_0 \{ q + (1-q)[1 + p(\tau-1)]e^{-p(\tau-1)} \}; \tag{31}$$

$$2 < \tau < 3$$

$$P_{k3} = -P_0 \left\{ q^2 + q(1-q)[1 + p(\tau-2)]e^{-p(\tau-2)} - (1-q)^2 \frac{p^2}{2} (\tau-2)^2 e^{-p(\tau-2)} \right\}; \tag{32}$$

$$3 < \tau < 4$$

$$P_{k4} = -P_0 \left\{ q^3 + q^2(1-q)[1 + p(\tau-3)]e^{-p(\tau-3)} - (1-q)^2 \left[ (1+q) \frac{p^2}{2} (\tau-3)^2 - (1-q) \frac{p^3}{6} (\tau-3)^3 \right] e^{-p(\tau-3)} \right\}. \tag{33}$$

Определив максимальные усилия в контактном сечении по формулам (17) или (18), можно вычислить максимальные значения контактных напряжений:

$$\sigma_{km} = 0,388 \sqrt[3]{\frac{P_{km} E^2}{R^2}} \quad (34)$$

и радиус контактной площадки:

$$r_k = 1,109 \sqrt[3]{\frac{P_{km} R}{E}} \quad (35)$$

Полученные зависимости позволяют проводить анализ напряженного состояния инструмента при его соударении с пластиной и оценивать величину контактных напряжений на поверхности пластины.

### Литература

1. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Стройиздат, 1965. – 228 с.
2. Еремьянц В.Э., Панова Л.Т. Приближенный метод расчета процесса соударения сферы с пластиной // Вестник Кыргызско-Российского Славянского ун-та. – Бишкек, 2006. – Т. 6. – №1. – С. 143–149.
3. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.