УДК 517.9 9 (575.2) (04)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.К. Кыдыралиев – канд. физ.-мат. наук, доц.
А.Б. Урдалетова **–** канд. физ.-мат. наук, доц.

The work is devoted to describing economical situations by linear difference and differential equations. A nonstandard method for solving these equations is presented.

Проблема повышения качества профессионального обучения, которая стояла во все времена, не утратила своей актуальности и в настоящее время. Изменившиеся социально-экономические условия, рост наукоемкости производства, быстрый рост объема научно-технической информации, внедрение новых информационных технологий во все сферы деятельности человека определяют необходимость реформирования высшего профессионального образования в целом, и экономического в частности.

Будущий специалист в области экономики должен иметь развитый экономико-математический стиль мышления, уметь применять технологии математического моделирования при решении профессиональных задач.

Умение моделировать экономические процессы является необходимым для любого серьезного исследователя. Большинство моделей, изучаемых в экономической теории, сформулировано на языке дифференциальных уравнений [1, 2]. Этот подход позволяет использовать хорошо развитый инструментарий теории дифференциальных уравнений. При этом, к сожалению, очень часто студенты и начинающие ученые не понимают, каким образом реальная ситуация может быть смоделирована – переведена на язык математики. В связи с этим считаем, что наряду с дифференциальными уравнениями необходимо использовать и разностные уравнения, которые позволяют более явно проследить процесс построения модели. В предлагаемой работе проиллюстрирован этот подход.

1. Линейные уравнения первого порядка

Для того чтобы подчеркнуть единую природу линейных разностных и дифференциальных уравнений проведем процесс получения решения этих уравнений одновременно.

Линейным разностным уравнением первого порядка с постоянным коэффициентом называется уравнение:

$$x_n = ax_{n-1} + b_n, \qquad (1)$$

где x_n – значение исследуемой величины в n-ый период; a – коэффициент; b_n – свободный член уравнения.

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка с постоянным коэффициентом называется уравнение:

$$y' = ay + b(x), \qquad (1a)$$

где $y(x)$ – значение исследуемой величины в момент x, a – коэффициент; $b(x)$ – свободный член уравнения.

Разделим уравнение (1) на a^n:

$$a^{-n} x_n - a^{-(n-1)} x_{n-1} = b_n a^{-n}$$

и обозначив $a^{-к} x_к$ через $z_к$ получим, что

$$z_n - z_{n-1} = b_n a^{-n}. \qquad (2)$$

Разделим уравнение *(1а)* на e^{ax}:

$$y' e^{-ax} - aye^{-ax} = b(x)e^{-ax},$$

и обозначив ye^{-ax} через z получим, что

$$z' = b(x)e^{-ax}. \qquad (2а)$$

Так как

$$z_n - z_0 = (z_n - z_{n-1}) + (z_{n-1} - z_{n-2}) + \ldots + (z_2 - z_1) + (z_1 - z_0),$$

в силу уравнения (2), получаем:

$$z_n - z_0 = b_n a^{-n} + b_{n-1} a^{-n+1} + \ldots + b_1 a^{-1}. \qquad (3)$$

Проинтегрируем уравнение (2а) и получим:

$$z = \int b(x)e^{-ax}dx + C. \qquad (3а)$$

Вернувшись к исходным обозначениям и умножив равенство (3) на a^n, получим искомую формулу:

$$x_n = x_0 a^n + b_n + b_{n-1} a + \ldots + b_1 a^{n-1}. \qquad (4)$$

Вернувшись к исходным обозначениям и умножив равенство (3а) на e^{ax}, получим искомую формулу:

$$y = (\int b(x)e^{-ax}dx + C)e^{ax}. \qquad (4а)$$

Формула (4) примет вид:

$$x_n = x_0 a^n + \sum_{k=1}^{n-1} g_{n-k} a^k + \sum_{k=1}^{n-1} h_{n-k} a^k, \text{ если } b_k = g_k + h_k \text{ для всех } k, \qquad (5)$$

и в частности,

$$x_n = x_0 a^n + g\frac{a^n - 1}{a-1} + h\frac{a^n - c^n}{a-c}, \text{ если } b_k = g + hc^{k-1}. \qquad (6)$$

Отметим, что выражение $x_0 a^n$ называется общим решением однородного уравнения $x_n - ax_{n-1} = 0$, а остальные слагаемые есть частные решения уравнений с соответствующими правыми частями.

Формула (4а) примет вид:

$$y = (\int [g(x) + h(x)]e^{-ax}dx + C)e^{ax}, \text{ если } b(x) = g(x) + h(x) \text{ для всех } x; \qquad (5а)$$

и в частности,

$$y = -\frac{g}{a} + \frac{h}{c-a}e^{cx} + Ce^{ax}, \text{ если } b(x) = g + he^{cx}. \qquad (6а)$$

Отметим, что выражение Ce^{ax} называется общим решением однородного уравнения $y' - ay = 0$, а остальные слагаемые есть частные решения уравнений с соответствующими правыми частями.

Задача 1. Разностная (дискретная) модель

Со счета, содержащего 50 000 евро в конце каждого месяца снимают по 1 000 евро. Сколько денег останется на счете через 5 лет, если ставка интереса 12%?

Эту задачу очень легко перевести на язык математики, используя разностные уравнения.

Пусть x_n – это количество денег на счете в конце месяца с номером n. Тогда имеет место уравнение:

$$x_n = (1 + 0{,}12 \cdot (1/12))\, x_{n-1} - 1000, \qquad (7)$$

с начальным условием: $x_0 = 50\,000$.

Поэтому, из формулы (6)

$$x_{60} = (1 + 0{,}01)^{60} \cdot 50000 - 1000\frac{(1+0{,}01)^{60} - 1}{0{,}01} = 9165$$

Задача 2. Дифференциальная (непрерывная) модель

Стоимость квартиры ежегодно уменьшается на 12 000 евро за счет износа и увеличивается на 12% в год за счет инфляции. Сколько будет стоить квартира через 5 лет, если в начальный момент времени она стоила 50 000 евро?

Эту задачу, также как и задачу 1, легко решить, используя разностные уравнения.

Пусть y_n – это стоимость квартиры в конце периода длительностью t и номером n. Тогда имеет место уравнение:

$$y_n = (1 + 0{,}12 \cdot t)\, y_{n-1} - 12000 \cdot t, \qquad (7а)$$

с начальным условием: $y_0 = 50\,000$.

В частности, если период это месяц, то имеет место уравнение (7).

Но будет более корректно предполагать, что износ и инфляция происходят непрерывно.

Поэтому, переписав уравнение (7а) в виде:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{t} = 0{,}12 y_{n-1} - 12000,$$

и устремив t к нулю, приходим к дифференциальному уравнению:

$$y' = 0{,}12y - 12000.$$

Его общее решение, по формуле (6а),

$$y = Ce^{0{,}12t} + 100\,000.$$

Воспользовавшись начальным условием получим $50000 = C + 100000$ и $C = -50000$. Следовательно, изменение стоимости квартиры описывается функцией $y = -50000e^{0{,}12t} + 100\,000$.

Отсюда, если предположения, которые легли в основу нашей модели, верны, то через 5 лет квартира будет стоить:

$$y(5) = -50000e^{0{,}6} + 100\,000 = 8894 \text{ евро.}$$

2. Модель ценообразования (1)

Анализ изменения цены взаимозаменяемых товаров (товаров-субститутов), выпускаемых двумя фирмами показал следующее:

- фирма ЛИД в каждом периоде определяет цену как 80% своей цены предыдущего периода плюс \$20;
- фирма ФОЛ назначает цену, взяв 70% своей цены и 30% цены фирмы ЛИД предыдущего периода.

Требуется выяснить, как будут меняться цены в будущем, зная, что в начальный момент времени цена товара фирмы ЛИД \$120, цена товара фирмы ФОЛ \$130.

Разностная (дискретная) модель

Пусть x_n – это цена товара фирмы ЛИД, а y_n – цена товара фирмы ФОЛ в периоде с номером n. Тогда имеет место система уравнений с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{cases} x_n = 0{,}8x_{n-1} + 20, & x_0 = 120, \\ y_n = 0{,}3x_{n-1} + 0{,}7y_{n-1}, & y_0 = 130. \end{cases} \qquad (8)$$

Из 1-го уравнения системы (8), воспользовавшись формулой (6), получим функцию, описывающую изменение цены товара фирмы ЛИД:

$$x_n = (0{,}8)^n \cdot 120 + 20\frac{1-(0{,}8)^n}{1-0{,}8} = (0{,}8)^n \cdot 20 + 100.$$

Подставив значение x_n во 2-ое уравнение системы (8), получим уравнение:

$$y_n = 0{,}7y_{n-1} + 6(0{,}8)^{n-1} + 30.$$

Его решение, описывающее изменение цены товара фирмы ФОЛ, опять же по формуле (6) будет:

$$y_n = (0{,}7)^n \cdot 130 + 30\frac{1-(0{,}7)^n}{1-0{,}7} + 6\frac{(0{,}8)^n - (0{,}7)^n}{0{,}8-0{,}7} = (0{,}8)^n \cdot 60 - (0{,}7)^n \cdot 30 + 100.$$

Нетрудно заметить, что если политика ценообразования не будет меняться, то цена товара фирмы ЛИД, также как и цена товара фирмы ФОЛ, будет стремиться к \$100.

Дифференциальная (непрерывная) модель

Для того, чтобы описать ситуацию на языке дифференциальных уравнений, запишем систему (6) в виде:

$$\begin{cases} x_n = (1-0{,}2)x_{n-1} + 20, \quad x_0 = 120, \\ y_n = 0{,}3x_{n-1} + (1-0{,}3)y_{n-1}, \quad y_0 = 130, \end{cases}$$

и повторив рассуждения, приведенные в предыдущих пунктах, получим систему:

$$\begin{cases} x' = -0{,}2x + 20, \quad x_0 = 120, \\ y' = 0{,}3x - 0{,}3y, \quad y_0 = 130. \end{cases} \qquad (8а)$$

Из 1-го уравнения системы (8а) и формулы (6а), получим:

$$x(t) = 100 + Ce^{-0,2t}.$$

Начальное условие дает равенство $120 = 100 + C$.

Следовательно, функция, описывающая изменение цены товара фирмы ЛИД будет:

$$x(t) = 100 + 20e\ -0,2t.$$

Подставив значение $x(t)$ во 2-ое уравнение системы (8а), получим уравнение:

$$y' = -0{,}3y + 30 + 6e^{-0,2t}.$$

Решив это уравнение (см. формулу (6а)), получим, что

$$y(t) = 100 + 60e^{-0,2t} + C_1e^{-0,3t}.$$

Определив из начального условия значение коэффициента C_1, получим, что функция, описывающая изменение цены товара фирмы ФОЛ, будет:

$$y(t) = 100 + 60e^{-0,2t} - 30e^{-0,3t}.$$

Далее представлена модель, которая показывает, как могут меняться цены в условиях дуополии – в случае, когда на рынке действуют две конкурирующие фирмы. Эта ситуация будет описана с помощью системы линейных уравнений, которая будет решаться путем сведения к уравнению 2-го порядка. В связи с этим, следующий пункт будет посвящен изложению метода решения таких уравнений.

3. Линейные уравнения высших порядков

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x), \qquad (9)$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – постоянные коэффициенты; $f(x)$ – заданная функция.

ТЕОРЕМА 1. Если $k_1, k_2, \ldots, k_n$ являются корнями характеристического уравнения

$$k^n + p_1k^{n-1} + \ldots + p_{n-1}k + p_n = 0, \qquad (10)$$

то общее решение уравнения (1) можно получить, проинтегрировав цепочку (последовательность) линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$z_1' - k_1 z_1 = f(x), \qquad (9.1)$$

$$z_2' - k_2 z_2 = z_1, \qquad (9.2)$$

$$z_{n-1}' - k_{n-1} z_{n-1} = z_{n-2}, \qquad (9.n-1)$$

$$y' - k_n y = z_{n-1}. \qquad (9.n)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Подставив значение z_{n-1} из (9.n) в (9.n-1), затем значение z_{n-2} из (9.n-1) в (9.n-2) и так далее, получим требуемое.

Следует отметить, что Теорема 1 справедлива и для линейных разностных уравнений [3]. Для подтверждения этого положения, а также для иллюстрации Теоремы 1 служит:

ТЕОРЕМА 2. Решение уравнения второго порядка

$$y_m + py_{m-1} + qy_{m-2} = f(m), \qquad (10)$$

можно получить, решив цепочку разностных уравнений первого порядка:

$$z_m - k_1 z_{m-1} = f(m), \qquad (10.1)$$

$$y_m - k_2 y_{m-1} = z_m. \qquad (10.2)$$

Здесь p и q постоянные коэффициенты; f – заданная функция; k_1 и k_2 –корни квадратного алгебраического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Подставив значение z из (10.2) в (10.1) получим:

$$y_m - k_2 y_{m-1} - k_1(y_{m-1} - k_2 y_{m-2}) = f(m).$$

Далее, перегруппировав слагаемые

$$y_m - (k_1 + k_2) y_{m-1} + k_1 k_2 y_{m-2} = f(m),$$

и воспользовавшись теоремой Виета, убедимся в том, что уравнение (10) равносильно цепочке разностных уравнений (10.1) – (10.2).

4. Модель ценообразования (2)

Тщательно проанализировав рынок часов, Юля установила, что две фирмы, АЛЬФА и БЕТТА, конкурирующие на этом рынке в каждом периоде устанавливают цены на свою самую дешевую модель следующим образом.

АЛЬФА берет половину своей цены прошлого периода и добавляет к ней 40% цены, которая была у часов фирмы БЕТТА в прошлом периоде.

В свою очередь, БЕТТА берет 60% цены АЛЬФА и 30% своей цены и добавляет к полученной сумме \$5,5.

Зная, что в начальный момент времени цена часов в фирме АЛЬФА \$10, а в фирме БЕТТА \$12,5, Юля собирается проследить динамику изменения цен. Проделаем это вместе с нею.

Разностная (дискретная) модель

Пусть x_n – это цена часов фирмы АЛЬФА, а y_n – фирмы БЕТТА в периоде с номером n. Тогда имеет место система уравнений с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}5x_n + 0{,}4y_n & x_0 = 10, \\ y_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}3y_n + 5{,}5, & y_0 = 12{,}5. \end{cases} \qquad (11)$$

Выразим y_n из 1-го уравнения системы (11)

$$y_n = 2{,}5x_{n+1} - 1{,}25x_n. \qquad (12)$$

и подставив соответствующие значения во 2-е уравнение этой системы, получим:

$$2{,}5x_{n+2} - 1{,}25x_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}3(2{,}5x_{n+1} - 1{,}25x_n) + 5{,}5.$$

Приведем подобные члены

$$2{,}5x_{n+2} - 2x_{n+1} - 0{,}225x_n = 5{,}5,$$

и разделив уравнение на 2,5, получим линейное разностное уравнение вида (10):

$$x_{n+2} - 0{,}8x_{n+1} - 0{,}09x_n = 2{,}2. \qquad (13)$$

Соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^2 - 0{,}8k - 0{,}09 = 0$$

имеет корни $-0{,}1$ и $0{,}9$.

Следовательно, по теореме 2, уравнение (13) эквивалентно цепочке уравнений:

$$z_{n+1} + 0{,}1 z_n = 2{,}2, \qquad (13.1)$$

$$x_{n+1} - 0{,}9x_n = z_n. \qquad (13.2)$$

При этом, из начальных условий и 1-го уравнения системы (11) следует, что $x_1 = 10,$ а из этого факта и уравнения (13.2) $z_0 = 1.$

Тогда, из формулы (6), получим, что

$$z_n = (-0{,}1)^n \cdot 1 + 2{,}2\frac{1-(-0{,}1)^n}{1-(-0{,}1)} = 2 - (-0{,}1)^n \cdot$$

В результате, решение уравнения (13) свелось к решению уравнения

$$x_{n+1} - 0{,}9x_n = 2 - (-0{,}1)^n.$$

Используем еще раз формулу (6), получим:

$$x_n = (0{,}9)^n \cdot 10 + 2\frac{1-(0{,}9)^n}{1-0{,}9} - \frac{(-0{,}1)^n - (0{,}9)^n}{-0{,}1-0{,}9} = 20 + (-0{,}1)^n - 11(0{,}9)^n.$$

Соберем подобные члены, и получим, что изменение цены часов фирмы АЛЬФА описывается функцией:

$$x_n = 20 + (-0,1)^n - 11\cdot(0,9)^n.$$

Для того чтобы получить подобный результат для фирмы БЕТТА достаточно подставить найденное значение x_n в (12):

$$y_n = 2,5[20 + (-0,1)^{n+1} - 11\cdot(0,9)^{n+1}]x_{n+1} - 1,25[20 + (-0,1)^n - 11\cdot(0,9)^n] =$$
$$= 25 - 1,5\cdot(-0,1)^n - 11\cdot(0,9)^n.$$

В результате Юля может сделать заключение, что если политика ценообразования не будет меняться, то через большой интервал времени цена часов фирмы АЛЬФА стабилизируется на уровне \$20, а фирмы БЕТТА на уровне \$25. Кроме того, полученные формулы позволяют спрогнозировать цены на более короткие промежутки времени. Так, если цены меняются 1 раз в полугодие, то через 4 года цена часов фирмы АЛЬФА будет равна:

$$x_8 = 20 + (-0,1)^8 - 11\cdot(0,9)^8 \approx \$15,26,$$

а фирмы БЕТТА

$$y_8 = 25 - 1,5\cdot(-0,1)^8 - 11\cdot(0,9)^8 \approx \$20,26.$$

Дифференциальная (непрерывная) модель

Для того чтобы воспользоваться непрерывной моделью, перепишем систему (11) в виде:

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = -0,5x_n + 0,4y_n & x_0 = 10, \\ y_{n+1} - y_n = 0,6x_n - 0,7y_n + 5,5, & y_0 = 12,5, \end{cases}$$

и предположив, что цена меняется непрерывно, получим систему:

$$\begin{cases} x' = -0,5x + 0,4y, & x_0 = 10, \\ y' = 0,6x - 0,7y + 5,5, & y_0 = 12,5. \end{cases} \quad (11а)$$

Из 1-го уравнения системы (11а) выразим y:

$$y = 2,5x' + 1,25x \quad (12а)$$

и подставив во 2-е уравнение, получим:

$$2,5x'' + 1,25x' = 0,6x - 0,7(2,5x' + 1,25x) + 5,5.$$

Соберем подобные члены и, разделив полученное уравнение на 2,5, получим линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$x'' + 1,2x' + 0,11x = 2,2. \quad (13а)$$

Теорема 1 позволяет записать уравнение (13а) в виде цепочки:

$$x' + 1,1x = z,\ x(0) = 10; \quad (13а.1)$$
$$z' + 0,1z = 2,2,\ z(0) = 11. \quad (13а.2)$$

Для того чтобы получить значение $z(0)$, вычислим:

$$x'(0) = -0,5\cdot 10 + 0,4\cdot 12,5 = 0,$$

и подставим в уравнение (13а.1).

Общее решение уравнения (13а.2) (формула (6а)) $z = 22 + Ce^{-0,1t}$.

Определим значение C: $11 = 22 + C$, и получим, что решение уравнения (13а) с соответствующими начальными условиями, есть решение задачи:

$$x' + 1,1x = 22 - 11e^{-0,1t},\ x(0) = 10.$$

Ее решение

$$x = 20 - 11e^{-0,1t} + e^{-1,1t}.$$

Использовав найденное выражение для x, из (24) найдем формулу для определения цены фирмы БЕТТА:

$$y = 2,5\left(20 - 11e^{-0,1t} + e^{-1,1t}\right)' + 1,25(20 - 11e^{-0,1t} + e^{-1,1t}) = 25 - 11e^{-0,1t} - 1,5e^{-1,1t}.$$

Примечания:

1. Существуют методы, позволяющие решать системы уравнений напрямую, не сводя к уравнениям высоких порядков [4].

2. Рассматривая рынки, на которых действуют три, четыре и т.д. фирмы, можно получать примеры приложений уравнений 3-го, 4-го и т.д. порядков.

Литература

1. *McCandless Jr. G.T., Wallace N.* Introduction to Dynamic Macroeconomic Theory. – Cambridge, Harvard University Press, 1991. – 380 p.
2. *Larson R.E., Hostetler R.P.* Brief Calculus with Applications. – USA, D.C. Heath and Company, 1987. – 910 p.
3. *Кыдыралиев С.К., Урдалетова А.Б.* Введение в линейные разностные и дифференциальные уравнения. – Бишкек: БГИЭиК, 1994.
4. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйшая школа, 1974.