

УДК 621.9 : 62 – 225.1 (575.2) (04)

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДА КОНТРОЛЯ ВЕЛИЧИНЫ РАДИАЛЬНОГО СМЕЩЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС ИЗДЕЛИЯ, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ НА АЭРОСТАТИЧЕСКИХ ОПОРАХ**

*А.П. Муслимов* – докт. техн. наук, профессор,  
*О.А. Киреев* – докт. техн. наук

It is developed the mathematical model of high sensitive instrument for checking the radial displacement of the centre of mass of the product with using the product rotation on aerostatic bearings.

Исследования, проведенные в работах [1–3] показывают, что методы контроля величины радиального смещения центра масс (РСЦМ) изделий малыми массой (10 г) и габаритами: наклонная плоскость, “вращение изделия в базирующем приспособлении” и “свободное вращение изделия на опорных валках” позволяют выявить РСЦМ до 5 мкм.

Для повышения чувствительности прибора контроля РСЦМ был разработан метод вращения изделия на аэростатических опорах, позволяющий существенно уменьшить трение измерительного прибора.

Для создания такого прибора необходимо разработать математическую модель метода контроля, решение которой позволит определить основные его параметры.

Пусть контролируемое изделие, вращающееся на аэростатических опорах, вращается вокруг оси Z, тогда за обобщенные координаты примем геометрический центр O (x, y) и угол поворота оси Z (рис. 1).

Пренебрегая вертикальными колебаниями изделия, найдем кинетическую энергию вращающегося изделия.

$$T = \frac{Jc \cdot \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{1}{2} m v_c^2, \tag{1}$$

где  $I_c$  – момент инерции изделия относительно центра масс;  $m$  – масса изделия;  $v_c$  – скорость движения центра масс.

Координаты центра масс по расчетной схеме (рис. 1) определяются системой уравнений.

$$\begin{cases} x_c = x + e \cos \varphi \\ y_c = y + e \sin \varphi, \end{cases} \tag{2}$$

где  $e = OC$  – РСЦМ изделия.

Из (2) следует

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \dot{x} - e \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y}_c = \dot{y} + e \dot{\varphi} \cos \varphi. \end{cases} \tag{3}$$

Следовательно, скорость движения центра масс равна

$$V_c^2 = (\dot{x} - e \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + e \dot{\varphi} \cos \varphi)^2. \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнение (1), имеем

$$\begin{aligned} T &= \frac{Jc \cdot \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m}{2} (\dot{x} - e \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{y} + e \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 = \\ &= \frac{Jc \cdot \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m}{2} (x^2 - 2xe\dot{\varphi} \sin \varphi + e^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + y^2 + \\ &+ 2ye\dot{\varphi} \cos \varphi + e^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi). \end{aligned}$$

После преобразования получаем

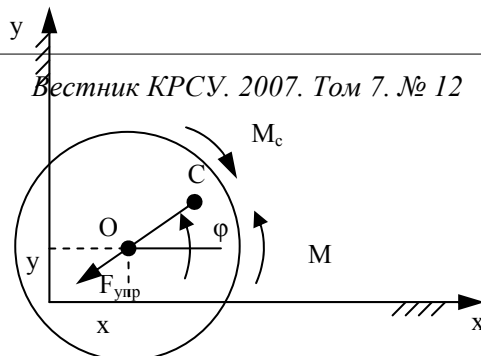


Рис. 1. Расчетная схема изделия на аэростатических опорах.

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}(J_c + me^2) + \frac{x^2}{2}m + \frac{y^2}{2}m + m\varphi e(y \cos \varphi - x \sin \varphi). \quad (5)$$

На основании (5) составляем левую часть уравнения Лагранжа [4]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = (J_c + me^2)\ddot{\varphi} + me \cos \varphi (\dot{y} - x\dot{\varphi}) - me \sin \varphi (\dot{x} + y\dot{\varphi}) + me \varphi y \sin \varphi + me \varphi x \cos \varphi.$$

После преобразования получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = J \ddot{\varphi} + m \cdot e (y \cos \varphi - x \sin \varphi), \quad (6)$$

где  $J = J_c + me^2$ .

Аналогично составляются левые части уравнения Лагранжа по координатам  $x$  и  $y$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = m\ddot{x} - me(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = m\ddot{y} - me(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi). \end{cases} \quad (7)$$

Обобщенные силы для координат  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$  будут

$$\begin{cases} Q_x = -C_{эф}x; \\ Q_y = -C_{эф}y; \\ Q_\varphi = M - M_c, \end{cases} \quad (8)$$

где  $C_{эф}$  – коэффициент жесткости воздушной среды в аэростатических опорах;  $M$  – вращающий момент (полагаем, что  $M = \text{const}$ );  $M_c = \beta \dot{\varphi}$  – момент сопротивления, пропорцио-

нальный угловой скорости вращения контролируемого изделия;  $B$  – коэффициент сопротивления.

Таким образом, динамические уравнения изделия на этапе разгона можно записать в виде

$$\begin{cases} J \ddot{\varphi} + me(\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi) = M - \beta \dot{\varphi} \\ m \ddot{\varphi} - me(\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = -C_{эф}x \\ m \ddot{y} + me(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = -C_{эф}y. \end{cases} \quad (9)$$

Начальные условия движения контролируемого изделия имеют вид

$$t=0; x=0; y=0; \dot{x}=0; \dot{y}=0; \varphi=0; \dot{\varphi}=0. \quad (10)$$

При отсутствии РСЦМ изделия ( $e=0$ ) и при нулевых начальных условиях (10) уравнение (9) имеет следующие решения

$$\begin{cases} \omega = \frac{M}{\beta} \left( 1 - e^{-\frac{\beta t}{J}} \right) \\ x = 0; y = 0. \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{При } t \rightarrow \infty; \omega = \omega_{\max} = \frac{M}{\beta}.$$

Графически решение уравнения (11) представлено на рис. 2.

При наличии у контролируемого изделия РСЦМ ( $e \neq 0$ ) решение системы уравнения (9) в замкнутом виде получить нельзя в силу ее нелинейности.

Для отыскания приближенного решения преобразуем уравнение (9)

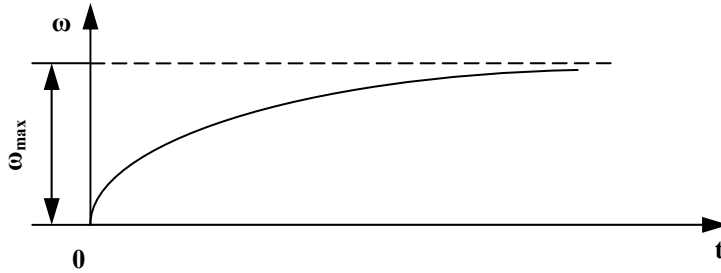


Рис. 2. График разгона изделия при  $e=0$ .

$$\ddot{x} + k^2 x = e(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = -e \frac{d^2}{dt^2}(\cos \varphi); \quad (12)$$

$$\ddot{y} + k^2 y = e(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = -e \frac{d^2}{dt^2}(\cos \varphi),$$

где  $k^2 = \frac{C_{\text{эф}}}{m}$ .

Решение уравнений (12) и (13) будем искать в виде

$$x = \frac{d^2}{dt^2}(A \cos \varphi), y = \frac{d^2}{dt^2}(B \sin \varphi), \quad (13)$$

где  $A=A(t)$ ,  $B=B(t)$ .

Полагаем, что приращение функций  $A$  и  $B$  во время одного оборота  $\tau$  мало по сравнению с их величинами, т.е.

$$\Delta A \ll A, \Delta B \ll B. \quad (15)$$

Раскладывая  $\Delta A$  и  $\Delta B$  в ряд, имеем

$$\begin{cases} \Delta A = \dot{A}\tau + \frac{1}{2}\ddot{A}\tau^2 + \dots \\ \Delta B = \dot{B}\tau + \frac{1}{2}\ddot{B}\tau^2 + \dots \end{cases} \quad (16)$$

С учетом (15) получим

$$\begin{cases} A \ll \frac{A}{\tau} = A\omega; \ddot{A} \ll \frac{A}{\tau^2} = A\omega^2 \\ B \ll \frac{B}{\tau} = B\omega; \ddot{B} \ll \frac{B}{\tau^2} = B\omega^2 \end{cases} \quad (17)$$

Примем также, что приращение угловой скорости за один оборот изделия мало по сравнению с  $\omega$

$$\Delta \dot{\varphi} = \ddot{\varphi}\tau + \frac{1}{2}\ddot{\ddot{\varphi}}\tau^2 + \dots \ll \omega.$$

Откуда имеем

$$\ddot{\varphi} \ll \omega^2, \ddot{\ddot{\varphi}} \ll \omega^3. \quad (18)$$

Из (14) следует

$$\ddot{x} = \frac{d^4}{dt^4}(A \cos \varphi); \ddot{y} = \frac{d^4}{dt^4}(B \sin \varphi).$$

После дифференцирования и исключения слагаемых, имеющих порядок малости выше первого, получим

$$x = A\varphi^4 \cos \varphi + (4A\varphi^3 + 6A\varphi\varphi^2)\sin \varphi; \quad (19)$$

$$y = B\varphi^4 \sin \varphi - (4B\varphi^3 + 6B\varphi\varphi^2)\cos \varphi. \quad (20)$$

Выразим величины  $A$ ,  $A$ ;  $B$ ,  $B$ , входящие в (19) и (20), через  $\varphi$ . Для этого подставим (14) в (12) и (13)

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}[(\ddot{A} - \dot{A}\varphi^2 + k^2 A + e)\cos \varphi - (2\dot{A}\dot{\varphi} + A\ddot{\varphi})\sin \varphi] = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2}[(\ddot{B} - \dot{B}\varphi^2 + k^2 B + e)\sin \varphi - (2\dot{B}\dot{\varphi} + B\ddot{\varphi})\cos \varphi] = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Для тождественного выполнения равенств (21) можно полагать, что

$$\begin{cases} \ddot{A} - \dot{A}\varphi^2 + k^2 A + e = 0 \\ 2\dot{A}\dot{\varphi} + A\ddot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{B} - \dot{B}\varphi^2 + k^2 B + e = 0 \\ 2\dot{B}\dot{\varphi} + B\ddot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Пренебрегая  $\ddot{A}$  и  $\ddot{B}$ , получим

$$\begin{cases} A = \frac{e}{\varphi^2 - k^2} = \frac{e}{\omega^2 - k^2}; B = A \\ \dot{A} = -A \frac{\ddot{\varphi}}{2\dot{\varphi}} = -\frac{e}{2(\omega^2 - k^2)} \cdot \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}; B = A \end{cases} \quad (22)$$

Подставив (22) в (19) и (20), получим

$$\begin{cases} x = \frac{e}{\omega^2 - k^2}(\varphi^4 \cos \varphi + 4\varphi\varphi^2 \sin \varphi) \\ y = \frac{e}{\omega^2 - k^2}(\varphi^4 \sin \varphi - 4\varphi\varphi^2 \cos \varphi) \end{cases} \quad (23)$$

Подставим выражение (23) в первое уравнение системы (9), получим

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi} + \frac{me^2}{\omega^2 - k^2}(\varphi^4 \sin \varphi \cos \varphi - 4\dot{\varphi}\varphi^2 \cos^2 \varphi - \\ - \varphi^4 \cos \varphi \sin \varphi - 4\dot{\varphi}\varphi^2 \sin^2 \varphi) = M - \beta\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

После преобразований имеем

$$J\ddot{\varphi} - \frac{4me^2}{\omega^2 - k^2} \dot{\varphi}^2 \ddot{\varphi} = M - \beta\dot{\varphi}. \quad (24)$$

Полагая, что  $\dot{\varphi}^2 = \omega^2$ , получим

$$\left( J + \frac{4me^2\omega^2}{k^2 - \omega^2} \right) \ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} = M. \quad (25)$$

Общее решение уравнения (25) состоит из частного

$$\varphi = \frac{M}{\beta}t, \quad (26)$$

которое описывает равномерное (установившееся) вращение изделия и решение однородного дифференциального уравнения

$$\varphi = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (27)$$

где  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{\beta}{J + \frac{4me^2\omega^2}{k^2 - \omega^2}}.$  (28)

Выражение (28) является корнями характеристического уравнения, составленного на основании (25), т.е.

$$\left( J + \frac{4me^2\omega^2}{k^2 - \omega^2} \right) \lambda^2 + \beta\lambda = 0. \quad (29)$$

Возможная неустойчивость вращения изделия определяется знаком знаменателя в выражении (28).

При  $J + \frac{4me^2\omega^2}{k^2 - \omega^2} < 0$  имеем  $\lambda_2 > 0$  и вращение изделия монотонно уходит от стационарного режима.

Таким образом, уравнение угловой скорости движения изделия будет иметь вид:

$$\varphi = \frac{M}{\beta} (J - e^{\lambda_2 t}) = \frac{M}{\beta} \left( J - \exp \left( -\frac{\beta t}{J + \frac{4me^2\omega^2}{k^2 - \omega^2}} \right) \right). \quad (30)$$

График изменения угловой скорости изделия на этапе разгона представлен на рис. 3.

При установившемся режиме из (9) следует

$$\begin{cases} M = \beta\dot{\varphi} \\ me\dot{\varphi}^2 \cos \varphi = C_{\text{эф}}x \\ me\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = C_{\text{эф}}y. \end{cases} \quad (31)$$

Расчетная схема представлена на рис. 4,

где  $OC=e;$   $OO_1 = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$

Пусть  $\varphi = \omega$ , тогда из (31) имеем

$$\rho = \frac{me\omega^2}{C_{\text{эф}}}, \quad (32)$$

где  $\rho$  – смещение оси вращения.

Если фиксировать максимально допустимое смещение оси, то зависимость  $\omega_{\text{max}}$  от величины РСЦМ определяется выражением

$$\omega_{\text{уст}} = \omega_{\text{max}} = \sqrt{\frac{\rho C_{\text{эф}}}{me}}. \quad (33)$$

**Выводы**

Разработанная математическая модель метода контроля РСЦМ вращения контролируемого изделия на аэростатических опорах позволяет:

- 1) произвести расчет массо-геометрических и режимных параметров устройства контроля, при которых гарантируется устойчивость процесса контроля (29), вычислить смещение оси вращения изделия (формула 32) в зависимости от величины РСЦМ изделия;

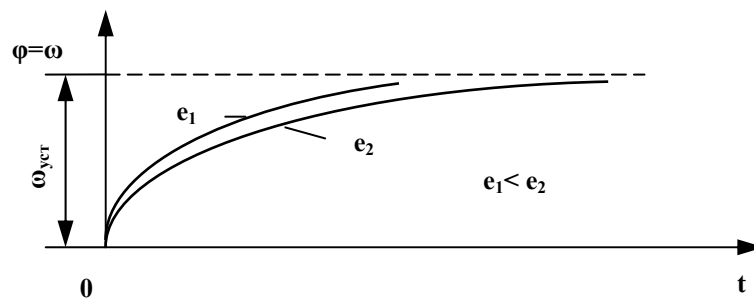


Рис. 3. Влияние РСЦМ изделия на график разгона.

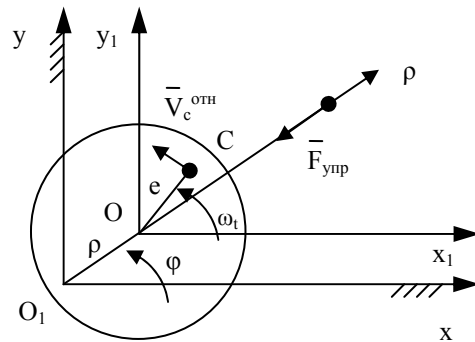


Рис. 4. Расчетная схема для определения величины оси вращения.

2) разработанный метод контроля и полученные инженерные формулы позволяют проектировать устройства контроля изделий типа тел вращения с различными геометрическими размерами и массами.

#### Литература

1. *Муслимов А.П.* Прибор автоматического контроля величины дисбаланса мелких изделий / Киргиз НИИТИ. – Бишкек, 1988.
2. *Муслимов А.П., Борзых Б.А.* Устройство контроля дисбаланса роторов. А.С. №938037. – М., 1982.
3. *Муслимов А.П.* О возможности контроля качества изделия по информативным параметрам прибора УКН-1-М. Вост. – Серия 13. – Вып. 2. – М., 1991.
4. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1996. – 824 с.