УДК 681.5

К ПРОЕКТИРОВАНИЮ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВЕКТОРНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ КАЧЕСТВА

ОМОРОВ Т.Т., КОЖЕКОВА Г.А.
izvestiya@ktu.aknet.kg

Рассматривается многокритериальная задача проектирования технических объектов. Предлагается методика параметрического синтеза систем по векторному критерию качества.

Ключевые слова: многокритериальная задача, векторный критерий качества, вектор-параметр, параметрический синтез, критериальные условия, процесс поиска, алгоритм поиска.

Проектирование технических и технологических объектов и систем их управления представляет собой, как правило, многокритериальную задачу [1,2]. При этом качество и эффективность этих систем оценивается векторным критерием [2]:

$$J = [J_1, J_2, \dots, J_N],$$

где J_ν – частные критерии ($\nu = \overline{1, N}$).

Последние зависят от структуры и параметров $p_1, p_2, \dots, p_m$ исследуемого объекта, которые образуют вектор $p = \left[p_1, p_2, \dots, p_m\right]$. В случае, когда структура проектируемой системы задана, показатели качества J_ν являются функциями только от этого вектор-параметра: $J_\nu = J_\nu(p)$. Проблема состоит в определении такого вектора $p = \left[p_1, p_2, \dots, p_m\right]$, обеспечивающего заданные требования к системе. Для решения задачи параметрического синтеза при этом используются различные подходы, в частности:

1) принцип Парето-оптимальности [3];
2) формализм аппарата математического программирования [4,5];
3) метод неравенств [6].

В первом случае векторная оптимизация сводится к нахождению некоторого элемента, принадлежащего множеству Парето. Последнее, как известно, обеспечивает компромисс между показателями качества J_ν. При этом построение указанного множества представляет определенные трудности [3].

В случае использования математического программирования возможны следующие варианты решения многокритериальной задачи:

- скаляризация многокритериальной задачи;
- формализация исходной задачи проектирования к задаче линейного или нелинейного программирования с ограничениями.

При скаляризации задачи с векторным критерием проблема сводится к оптимизации обобщенного скалярного критерия:

$$\hat{J} = \beta_1 J_1 + \beta_2 J_2 + \dots + \beta_N J_N,$$

где β_ν – весовые коэффициенты. Определение связи между параметрами β_ν и исходными требованиями к проектируемой системе является в свою очередь самостоятельной сложной проблемой. Как правило, назначение весовых коэффициентов осуществляется с помощью методов экспертных оценок.

Во втором варианте в качестве целевой функции выбирается один из главных показателей, в частности, $J_r(p)$, а на остальные налагаются ограничения:

$$J_\nu(p) \le \Delta_\nu, \qquad (1)$$
$$\nu = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, N,$$

где Δ_ν - максимально допустимое значение показателя J_ν.

Совокупность вектор-параметров $p = \left[p_1, p_2, \dots, p_m\right]$ проектируемого объекта, удовлетворяющих системе неравенств (1), образует подмножество

$\hat{P}=\left\{p\in R^m : J_\nu(p)\le\Delta_\nu, \quad \nu = 1, 2, ..., r-1, r+1, ..., N\right\}$, (2)

где R^m – m-мерное арифметическое пространство.

В результате исходная многокритериальная задача заменяется следующей экстремальной задачей:

$$\min_{p\in\hat{P}} J_r(p) = J_r(\tilde{p}), \qquad (3)$$

где $\tilde{p}$ - решение задачи параметрического синтеза.

В случае использования метода неравенств многокритериальная задача формализуется в виде системы неравенств (1), включающей допустимые ограничения для всех частных критериев $J_\nu(p)$. При этом задача с векторным критерием $J_\nu(p)$ сводится к определению произвольного вектор-параметра $\hat{p}=\left[\hat{p}_1, \hat{p}_2, ..., \hat{p}_m\right]$, принадлежащего подмножеству

$$P=\left\{p\in R^m : J_\nu(p)\le\Delta_\nu, \quad \nu=\overline{1,N}\right\}. \ (4)$$

Нахождение произвольного вектора p из подмножества P, т.е. $p\in P$, можно осуществлять, используя различные методы [5,6,7]. Рассмотрим возможность решения этой задачи на основе предложенного в [7] метода синтеза многомерных систем автоматического управления.

Для этой цели вначале определим функции

$$L_\nu(p)=\Delta_\nu - J_\nu(p), \ \nu=\overline{1,N}. \qquad (5)$$

Тогда выражение (4) для подмножества P можно записать в виде:

$$P=\left\{p\in R^m : \quad L_\nu(p)\ge 0, \quad \nu=\overline{1,N}\right\}. \ (6)$$

Теперь введем скалярную функцию:

$$I_1(p)=\sum_{\nu=1}^{N}\left|L_\nu(p)\right|-\sum_{\nu=1}^{N}L_\nu(p). \qquad (7)$$

Известно [8], что эта функция обладает следующим свойством:

$$I_1(p)=\begin{cases} o, & p\in P, \\ c, & p\notin P, \end{cases} \qquad (8)$$

где c – положительное число.

Таким образом, в случае, когда P – непустое подмножество ($P\ne\varnothing$) и начальный выбор $p=p^0\notin P$, исходная задача сводится к решению следующей задачи безусловной минимизации:

$$\min_{p\in R^m} I_1(p)=I_1(p^*), \qquad (9)$$

где p^* - вектор-параметр, который является корнем уравнения.

$$I_1(p)=0. \qquad (10)$$

Для определения вектора $p^*\in P$ необходимо осуществлять процесс поиска искомого решения. При этом параметры проектируемой системы изменяются во времени:

$$p_1=p_1(t), \quad p_2 = p_2(t), \ \dots, \ p_m = p_m(t).$$

Следовательно, критерий качества $I_1(p)$ также изменяется во времени:

$$I_1(p)=I_1\left[p(t)\right]=I_1(t).$$

Рассмотрим критериальную функцию

$$F(t)=\int_{t_0}^{t} I_1(\tau)\dot{I}_1(\tau)d\tau. \qquad (11)$$

Для построения алгоритма поиска, т.е. для решения экстремальной задачи (9) будем использовать теорему, сформулированную в [9].

Теорема. Пусть $I(t_0)\ne 0$ и для каждого t_0 и $t>t_0$ выполняется условие

$$\int_{t_0}^{t} I_1(t)\dot{I}_1(t)d\tau<0. \qquad (12)$$

Тогда оценочная функция $I_1(t)$ с течением времени убывает и

$$\lim_{t\to\infty} I_1(t) = 0 .$$

Для достижения условия (12) процесс поиска искомого вектора-параметра $p^* = \left[p_1^*, p_2^*, ... p_m^*\right]$ целесообразно рассматривать как процесс управления. Предположим, что процесс управления описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{p}_i(t) = u_i(t), \qquad i = \overline{1,m}, \qquad (13)$$

где $u_i(t) - i$ -ая компонента вектора управления $u(t) = \left[u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)\right]$.

При такой формализации решаемой задачи проблема состоит в определении алгоритма управления u(t), обеспечивающего минимизацию критерия качества $I_1(p)$.

Как известно, производная целевой функции $I_1(t)$ по времени определяется по формуле:

$$\dot{I}_1(t) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \, \dot{p}_i(t) , \qquad (14)$$

где частные производные

$$\beta_i \quad \frac{\partial I_1(p)}{\partial p_i}, \qquad =i \quad \overline{1,m}. \qquad (15)$$

Теперь подставим выражение для $\dot{I}_1(t)$, определяемое формулой (14), в правую часть (11). В результате получаем, что

$$F(t) = \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \beta_i I_1(\tau) \dot{p}_i(\tau) d\tau . \qquad (16)$$

С учетом (13) критериальную функцию запишем в виде

$$F(t) = \sum_{i=1}^{m} \int_{0}^{t} \beta_i I_1(\tau) u_i(\tau) d\tau. \qquad (17)$$

Далее потребуем, чтобы законы управления $u_i(t), \quad i = \overline{1,m},$ описывались следующими соотношениями:

$$u_i(t) = \alpha_i \operatorname{sign}(\beta_i), \qquad i = \overline{1,m}, \qquad (18)$$

где α_i - постоянные коэффициенты, которые пока являются неизвестными.

Выражение для F(t) с учетом (18) принимает следующий вид:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_{t_0}^{t} I_1(\tau) \left|\beta_i\right| d\tau. \qquad (19)$$

Отсюда видно, что для того, чтобы обеспечить отрицательность функции F(t) для каждого момента времени t достаточно, чтобы были отрицательны коэффициенты α_i :

$$\alpha_i < 0, \qquad i = \overline{1,m}. \qquad (20)$$

Таким образом, выбор коэффициентов α_i, $i = \overline{1,m}$, из условия (20) обеспечивает минимизацию критерия качества $I_1(p)$.

В заключение можно отметить, что изложенный алгоритм решения многокритериальной задачи можно использовать для синтеза параметров систем различного назначения, в частности, систем автоматического управления, оптимальных цифровых фильтров, систем идентификации моделей технических и природных объектов.

Литература

1. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. – М.: Наука, 1971. – 384 с.
2. Солодовников В.В., Бирюков В.Ф., Тумаркин В.И. Принцип сложности в теории управления. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Паретооптимальные решения многокритериальных задач. - М.: Наука, 1982.-256с.
4. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.:Мир, 1975. – 534 с.

5. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975.
6. Zakian V. New formulation for the Method of Inequalities. – Proc. IEE, 1979. v.126, № 6, pp. 579–584.
7. Черников С.Н. Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968. – 488 с.
8. Бойчук Л.М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. – М.: Энергия, 1971. – 112 с.
9. Оморов Т.Т., Кожекова Г.А. Синтез систем управления многомерными объектами по критериальным ограничениям // Известия НАН КР №1. – Б.: Илим, 2009. – С. 45-51.