УДК 681.5

К ПРОЕКТИРОВАНИЮ УПРАВЛЯЮШЕЙ ПОДСИСТЕМЫ САУ С УЧЁТОМ ПО ЗАДАННЫМ ПОКАЗАТЕЛЯМ КАЧЕСТВА

ДЖОЛДОШЕВ Б.О.
izvestiya@ktu.aknet.kg

Рассматривается задача управления нелинейным многомерным объектом. Предложен структурный метод синтеза регулятора, позволяющий обеспечить основные требования к проектируемой системе. К ряду основных требований можно отнести точность, быстродействие, а также ограничения на величины управляемых переменных.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейный многомерный объект управления, описываемый следующим векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t)],\quad x(t_o) = x^o, \quad t \in [t_o, t_k], \tag{1}$$

где $x(t) = [x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)]^T$ – вектор состояния; $u(t) = [u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)]^T$ – вектор управляющих воздействий; $f(x,u) = [f_1(x,u), f_2(x,u), ..., f_n(x,u)]^T$ – n-мерная вектор-функция, удовлетворяющая условиям Коши; t_0, t_k – начальный и конечный моменты процесса управления.

В дальнейшем предполагается, что объект (1) является полностью управляемым и необходимо стабилизировать его нулевое состояние. Основными показателями качества регулирования будем считать динамическую точность и быстродействие системы управления. Поэтому в качестве степени достижения цели управления целесообразно выбрать векторный критерий допустимого качества управления [1, 2]. По вектору качества выбираем положительные функции $\sigma_i(t)$, с помощью которых задаются границы допустимых областей. Требования, предъявляемые к качеству синтезируемой системы, определяются переходными процессами по ошибке управления $e(t)$. Успешность выполнения заданной цели управления g(t) достаточно полно характеризует вектор ошибки управления (невязки)

$$e(t) = g(t) - x(t),$$

где $g_i(t)$ – задающее воздействие для координаты $x_i(t)$..

Математическое описание такого инженерного критерия можно задавать на основе следующих модульных неравенств:

$$|x_i(t)| = |e(t)| \le \sigma_i(t),\quad t \in [t_{0,} t_k], \quad i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где $\sigma_i(t)$ – положительные, непрерывно-дифференцируемые функции, определяющие точность и быстродействие проектируемой автоматической системы.

Соотношения (2) описывают допустимые области (подмножества) $D_i(t)$ для переменных $x_i(t)$.

$$D_i(t) = \{x_i(t) \in R^1 : \ |x_i(t)| \le \sigma_i(t)\},\quad i = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Тогда допустимое подмножество $D(t)$ для вектора состояния $x(t)$ определяется соотношением

$$D(t) = \{x(t) \in R^n : \ x_i(t) \in D_i(t),\quad i = \overline{1,n}\}. \tag{4}$$

Проблема управления формулируется следующим образом. Для объекта управления, описываемого векторным уравнением (1), необходимо определить структуру и параметры регулятора, обеспечивающего выполнение требований (2) к точности и быстродействию проектируемой системы, т.е. к качеству процесса управления.

2. Условия достижения заданных показателей качества управления. Рассмотрим возможность решения сформулированной задачи синтеза управления нелинейным объектом на основе принципа гарантируемой динамики [1, 2].

Предварительно запишем уравнения нелинейного объекта (1) в координатной форме

$$\dot{x}_i(t) = f_i[x(t),u(t)], \qquad x_i(t_o) = x_i^{\,o}, \qquad i = \overline{1,n}, \quad t \in [t_o, t_k]. \tag{4}$$

Проведенный анализ показывает, что сформулированную выше проблему управления можно решить, если для синтеза регулятора использовать следующий известный результат принципа гарантируемой динамики [1].

Теорема 1. Пусть $x(t_0) \in D(t_0)$. Тогда для вектора состояния $x(t) \in D(t)$ достаточно, чтобы для каждого момента времени $t \in [t_0, t_k]$ выполнялись соотношения

$$\int_{t_0}^{t} x_i(\tau)\dot{x}_i(\tau)d\tau \quad \le \quad \int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau)\dot{\sigma}(\tau)d\tau, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Таким образом, для достижения желаемого качества переходных процессов закон управления $u(t)$ должен обеспечивать выполнение неравенств (5). Один из возможных путей достижения желаемого качества - задание определенных условий для функций $f_i[x(t),u(t)]$. При этом такие условия должны обеспечивать решение следующих задач:

1) параметрическую разрешимость неравенств (5);

2) определить структуру и параметры закона управления.

Желаемую динамику такой замкнутой системы управления зададим в виде векторного уравнения

$$\dot{x}(t) = f^*(x,p), \tag{6}$$

где $f^* = \left[f_1^*(x,p_1),\, f_2^*(x,p_1), \ldots, f_n^*(x,p_n)\right]^T$ – n-мерная, в общем случае нелинейная вектор-функция; $p = [p_1, p_2, \cdots, p_n]$ – r –-мерный вектор-параметр, подлежащий выбору так, чтобы решение x(t) системы (6) удовлетворяло условиям заданного качества управления (5). Введем подмножество

$$P^* = \left\{ p \in R^r : \quad x(t) \in D(t) \right\}. \tag{7}$$

Для определенности далее рассматриваем случай, когда вектор-функция $f^*(x,p)$ задается в линейной форме:

$$f^*(x,p) = P \cdot x(t), \tag{8}$$

где $P = \{p_{ij}\}_{n\times n}$ – вещественная n×n матрица, а вектор-параметры

$$p_1 = [p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}],\; p_2 = [p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2n}], \quad \ldots \quad , \quad p_n = [p_{n1}, p_{n2}, \ldots, p_{nn}].$$

Составной вектор-параметр

$$p = [p_1, p_2, \cdots, p_n]. \tag{9}$$

В результате введения понятия желаемой динамики для проектируемой замкнутой системы искомый закон управления u(t) целесообразно определить из условия близости соответствующих компонентов вектор - функций $f(x,u)$ и $f^*(x,p)$ с требуемой точностью. В частности эти условия целесообразно задавать в виде модульных неравенств:

$$\left| f_i[x(t),u(t)] - f_i^*[x(t),p] \right| \le \delta_i(t), \qquad i = 1,\ldots,n, \quad t \in [t_0, t_k], \tag{10}$$

где $\delta_i(t)$ – положительные непрерывно дифференцируемые функции, задающие точность приближения.

Таким образом, процедура синтеза регулятора для многомерного нелинейного объекта (1) состоит из двух этапов [2]:

1. Описание подмножества P^* и определение вектор-параметра $p \in P^*$.

2. Нахождение закона управления $u(t)$, обеспечивающего выполнение условий (10).

Вначале рассмотрим вопрос об описании подмножества P^*. Для этой цели соотношение (8) запишем в координатной форме

$$f_i^*(x,\ p_1) = \sum_{\nu=1}^{n} p_{i\nu} x_\nu(t), \quad i = \overline{1,n}, \tag{11}$$

где $p_i = [p_1, p_2, ..., p_n] -$ вектор-параметр задачи синтеза. Описание подмножества P^* и определение вектора p_i осуществляется на основе неравенств (5). С учетом (11) условия (5) имеют вид:

$$p_{ii} \int_{t_0}^{t} x_i^2(\tau) d\tau + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{n} p_{i\nu} \int_{t_0}^{t} x_i(\tau) x_\nu(\tau) d\tau \leq \Gamma_i(t), \tag{12}$$
$$i = \overline{1,n},$$

где заданные функции

$$\Gamma_i(t) = \int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau) \dot{\sigma}_i(\tau) d\tau. \tag{13}$$

Искомые условия определяются на основе следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть $x_i(t_0) \in D_i(t_0)$. Тогда условия допустимого качества управления (5) выполняются, если для каждого момента времени $t \in [t_0, t_k]$ справедливы соотношения

$$\sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{n} |p_{i\nu}| \left| \int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau) \sigma_\nu(\tau) d\tau \right| \leq \Gamma_i(t) - p_{ii} \int \sigma_i^2(\tau) d\tau, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Доказательство теоремы 2 приведено в [1].

Введем функции

$$L_i(p_i, t) = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{n} |p_{i\nu}| \left| \int_{t_o}^{t_k} \sigma_i(\tau) \sigma_\nu(\tau) d\tau \right| + p_{ii} \int_{t_o}^{t_k} \sigma_i^2(\tau) d\tau - \Gamma_i(t), \qquad i = \overline{1,n}.$$

Тогда описание искомого подмножества P^* дается соотношением

$$P^* = \left\{ p \in R^r : \quad L_i(p_i, t) \leq 0, \quad i = \overline{1,n} \right\}. \tag{15}$$

3. Синтез законов управления. Для синтеза искомого закона управления $u(t)$ будем использовать соотношения (10).

Введем функцию

$$F_i(x,u) = f_i(x,u) - f_i^*(x,p), \qquad i = \overline{1,n}. \tag{16}$$

Тогда неравенства (10) запишутся в виде

$$|F_i(x,u)| \leq \delta_i(t), \qquad i = \overline{1,n}, \qquad t \in [t_o, t_k]. \tag{17}$$

Воспользуемся теоремой 1. В результате условия, при выполнении которых гарантируется обеспечение соотношений (17), задаются в виде неравенств

$$\int_{t_o}^{t} F_i[x(\tau), u(\tau)] \cdot \dot{F}_i[x(\tau), u(\tau)] d\tau \leq \int_{t_o}^{t_k} \delta_i(\tau) \dot{\delta}_i(\tau) d\tau, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{18}$$

При этом производные

$$\dot{F}_i(x,u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \sum_{\nu=1}^{ь} \frac{\partial F_i}{\partial u_\nu} \dot{u}_\nu$$

или

$$\dot{F}_i(x,u)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}f_j(x,u)+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial u_\nu}\dot{u}_\nu\ ,\quad i=\overline{1,n}. \qquad (19)$$

Введем вектор

$$F(x,u)=\left[F_1(x,u),F_2(x,u),...,F_n(x,u)\right]^T.$$

Теперь потребуем, чтобы

$$\dot{F}_i(x,u)=\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}\cdot\mathrm{sign}\left[F_j(x,u)\right],\quad i=\overline{1,n}, \qquad (20)$$

или в векторной форме

$$\dot{F}(x,u)=Y\cdot\mathrm{sign}\,\{F(x,u)\}, \qquad (21)$$

где $Y=[\gamma_1\quad\gamma_2\ \dots\quad\gamma_n]^T=\{\gamma_{i\nu}\}_{n\times n}$ – вещественная матрица, составленная из n-мерных векторов

$$\gamma_1=[\gamma_{11},\ \gamma_{12},\dots,\gamma_{1n}],\quad \gamma_2=[\gamma_{21},\ \gamma_{22},\dots,\gamma_{2n}],...,\gamma_n=[\gamma_{n1},\gamma_{n2},\dots,\gamma_{nn}].$$

Введем r-мерный вектор $\gamma=[\gamma_1,\ \gamma_2,\dots,\gamma_n]$ и подмножество

$$Y^*=\left\{\gamma\in R^r:\ \left|F_i(x,u)\right|\le\delta_i(t),\quad i=\overline{1,n}.\right\}.$$

Описание подмножества Y^* осуществляется аналогично описанию подмножества P^*.

Далее с учетом соотношений (19) условия (20) можно записать в виде

$$\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial u_\nu}\cdot\dot{u}_\nu(t)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial\dot{u}_\nu}\cdot f_j(x,u)=\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}\cdot\mathrm{sign}\left[F_j(x,u)\right],\quad i=\overline{1,n}. \qquad (22)$$

В векторной форме

$$M\cdot\dot{u}(t)+C\cdot f(x,u)=Y\cdot\mathrm{sign}\left[F(x,u)\right], \qquad (23)$$

$$M\cdot\dot{u}(t)=Y\cdot\mathrm{sign}\left[F(x,u)\right]-C\cdot f(x,u),$$

где функциональные матрицы

$$C=\{c_{ij}\}_{n\times n}=\left\{\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right\}_{n\times n},\qquad M=\left\{\frac{\partial F_i}{\partial u_\nu}\right\}_{n\times m},$$

в предположении, что существует обратная матрица

$$W^{-1}=\left[M^T M\right]^{-1}.$$

С учетом соотношений (16) и (8) уравнение динамики искомого многомерного регулятора можно записать в виде

$$\dot{u}(t)=W^{-1}\cdot M^T\cdot\left\{Y\cdot\mathrm{sign}\left[f(x,u)-f^*(x,u)\right]-C\cdot f(x,u)\right\},$$

или

$$\dot{u}(t)=W^{-1}\cdot M^T\cdot\left\{Y\cdot sign\left[f(x,u)-P\cdot x(t)\right]-C\cdot f(x,u)\right\}. \qquad (24)$$

Обобщенная структура системы управления, включающей динамический нелинейный регулятор с законом управления (24), показана на рис. 1. Здесь назначение нелинейного блока (НБ) состоит в формировании вектор-функции $f(x,u)$.

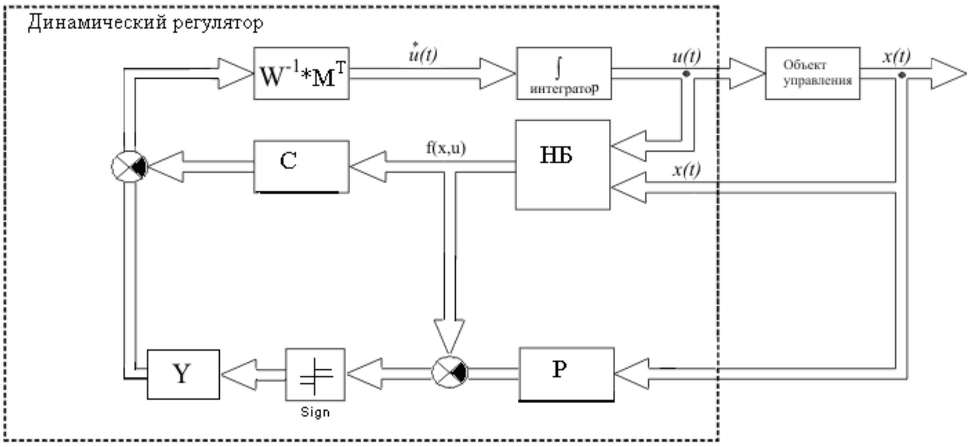

Рис.1. Структурная схема САУ

Если потребовать, чтобы

$$\dot{F}_i(x,u) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \cdot \int_{t_0}^{t} F_j(x,u,\tau) \cdot d\tau, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (25)$$

или в векторной форме

$$\dot{F}\left(x,u\right) = Y \cdot \int_{t_0}^{t} F(x,u)d\tau,$$

то соотношения (19) с учётом (25) можно записать в виде

$$\sum_{v=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial u_v} \cdot \dot{u}_v(t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial \dot{u}_v} \cdot f_j(x,u) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \cdot \int_{t_0}^{t} \left[F_j(x,u)\right] d\tau, \quad i = \overline{1,n}\,. \qquad (26)$$

В векторной форме

$$M \cdot \dot{u}(t) + C \cdot f(x,u) = Y \cdot \int_{t_0}^{t} F(x,u)d\tau\,. \qquad (27)$$

Уравнение динамики искомого многомерного регулятора (алгоритм управления) можно записать в виде

$$\dot{u}(x,t) = W^{-1} \cdot M^{T} \cdot \left[Y \cdot \int_{t_0}^{t} F(x,u)\, d\tau - C \cdot f(x,u) \right],$$

или

$$\dot{u}(x,t) = W^{-1} \cdot M^{T} \cdot \left[Y \cdot \int_{t_0}^{t} \left\{ f(x,u) - P \cdot x(\tau) \right\} d\tau - C \cdot f(x,u) \right] \,. \qquad (28)$$

Структура системы автоматического управления, включающей динамический нелинейный регулятор с законом управления (28), показана на рис.2.

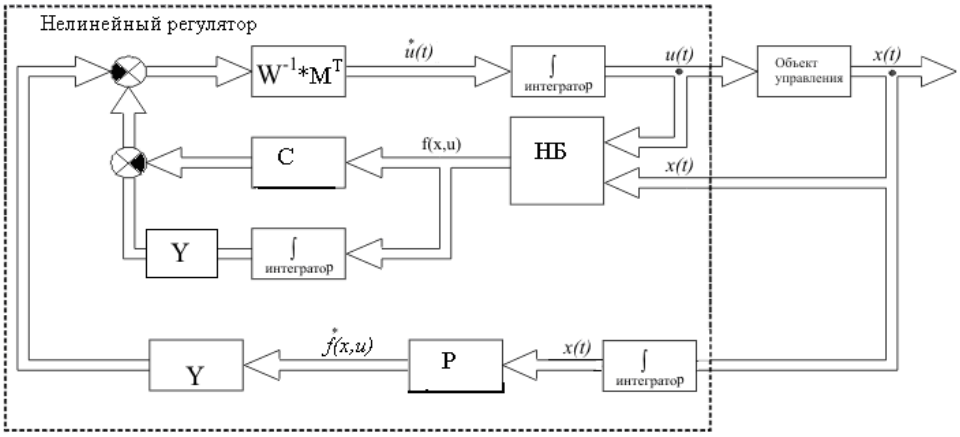

Рис.2. Обобщённая структура САУ нелинейным объектом

Выводы. Предложен структурный метод синтеза регулятора на базе принципа гарантируемой динамики [1, 2, 3], позволяющий обеспечить основные требования к проектируемой системе. К ряду основных требований можно отнести: получение на основе методов синтеза систем управления гарантированных результатов по управлению; возможность конструктивного учета заданных инженерных требований основным характеристикам системы (точности, быстродействию и т.д.), а также технических ограничений на величины управляемых переменных.

Литература

1. Оморов Т.Т. Принцип гарантируемой динамики в теории систем управления. Кн.1. Бишкек: Илим, 2001. -150с.
2. Оморов Т.Т., Б.О. Джолдошев. Синтез управляющих устройств для нелинейных систем с учётом показателей качества // Проблемы информатики и энергетики, № №2. 2010.– Ташкент Издательство «ФАН» АН РУз. – С. 3 - 8.
3. Джолдошев Б.О.. К параметрическому описанию множеств достижимости нелинейных многомерных САУ // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Б.: Илим, 2009, Вып. 41. – С.140-150.
4. Мирошник И.В., Никифоров В.С, Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб.: Наука, 2000.
5. Бойчук Л.М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. – М.: Энергия, 1971. – 112 с.
6. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovich P.V. Adaptive nonlinear control without over-parametrization // Syst. Control Lett. 1992. V. 19., P. 177-185.

В векторной форме

$$M \cdot \dot{u}(t) + C \cdot f(x,u) = Y \cdot \mathrm{sign}\left[F(x,u)\right], \qquad (23)$$

$$M \cdot \dot{u}(t) = Y \cdot \mathrm{sign}\left[F(x,u)\right] - C \cdot f(x,u),$$

где функциональные матрицы

$$C = \left\{c_{ij}\right\}_{n\times n} = \left\{\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right\}_{n\times n}, \qquad M = \left\{\frac{\partial F_i}{\partial u_\nu}\right\}_{n\times m},$$

в предположении, что существует обратная матрица

$$W^{-1} = \left[M^T M\right]^{-1}.$$

С учетом соотношений (16) и (8) уравнение динамики искомого многомерного регулятора можно записать в виде

$$\dot{u}(t) = W^{-1} \cdot M^T \cdot \left\{Y \cdot \mathrm{sign}\left[f(x,u) - f^*(x,u)\right] - C \cdot f(x,u)\right\},$$

или

$$\dot{u}(t) = W^{-1} \cdot M^T \cdot \left\{Y \cdot sign\left[f(x,u) - P \cdot x(t)\right] - C \cdot f(x,u)\right\}. \qquad (24)$$

Обобщенная структура системы управления, включающей динамический нелинейный регулятор с законом управления (24), показана на рис. 1. Здесь назначение нелинейного блока (НБ) состоит в формировании вектор-функции $f(x,u)$.

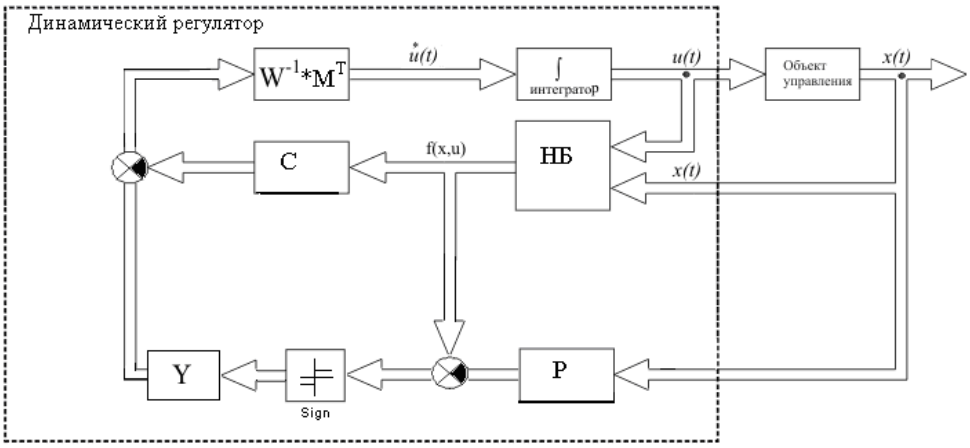

Рис.1. Структурная схема САУ

Если потребовать, чтобы

$$\dot{F}_i(x,u) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \cdot \int_{t_0}^{t} F_j(x,u,\tau) \cdot d\tau, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (25)$$

или в векторной форме

$$\dot{F}(x,u) = Y \cdot \int_{t_0}^{t} F(x,u) d\tau,$$

то соотношения (19) с учётом (25) можно записать в виде

$$\sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial u_\nu} \cdot \dot{u}_\nu(t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial \dot{u}_\nu} \cdot f_j(x,u) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \cdot \int_{t_0}^{t} \left[F_j(x,u)\right] d\tau, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (26)$$

В векторной форме

$$M \cdot \dot{u}(t) + C \cdot f(x,u) = Y \cdot \int_{t_0}^{t} F(x,u) d\tau. \qquad (27)$$

Уравнение динамики искомого многомерного регулятора (алгоритм управления) можно записать в виде

$$\dot{u}(x,t) = W^{-1} \cdot M^{T} \cdot \left[Y \cdot \int_{t_0}^{t} F(x,u)\, d\tau - C \cdot f(x,u) \right],$$

или

$$\dot{u}(x,t) = W^{-1} \cdot M^{T} \cdot \left[Y \cdot \int_{t_0}^{t} \left\{ f(x,u) - P \cdot x(\tau) \right\} d\tau - C \cdot f(x,u) \right] \quad . \qquad (28)$$

Структура системы автоматического управления, включающей динамический нелинейный регулятор с законом управления (28), показана на рис.2.

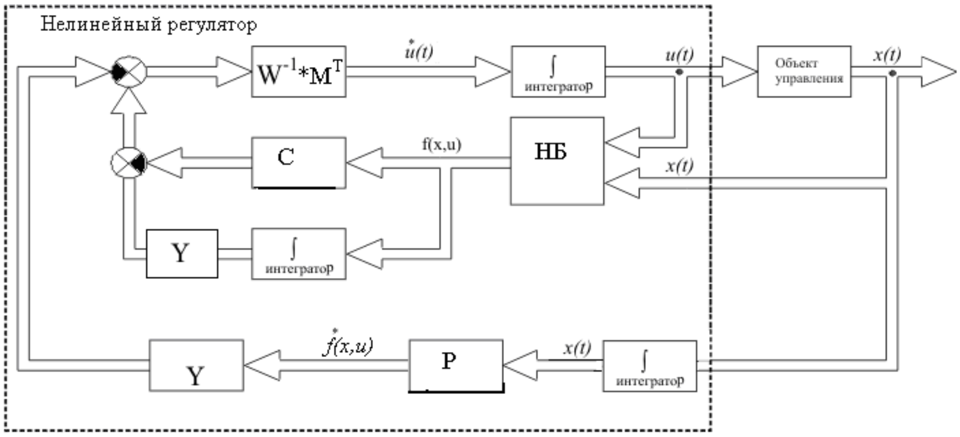

Рис.2. Обобщённая структура САУ нелинейным объектом

Выводы. Предложен структурный метод синтеза регулятора на базе принципа гарантируемой динамики [1, 2, 3], позволяющий обеспечить основные требования к проектируемой системе. К ряду основных требований можно отнести: получение на основе методов синтеза систем управления гарантированных результатов по управлению; возможность конструктивного учета заданных инженерных требований основным характеристикам системы (точности, быстродействию и т.д.), а также технических ограничений на величины управляемых переменных.

Литература

7. Оморов Т.Т. Принцип гарантируемой динамики в теории систем управления. Кн.1. Бишкек: Илим, 2001. -150с.
8. Оморов Т.Т., Б.О. Джолдошев. Синтез управляющих устройств для нелинейных систем с учётом показателей качества // Проблемы информатики и энергетики, № №2. 2010.– Ташкент Издательство «ФАН» АН РУз. – С. 3 - 8.
9. Джолдошев Б.О.. К параметрическому описанию множеств достижимости нелинейных многомерных САУ // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Б.: Илим, 2009, Вып. 41. – С.140-150.
10. Мирошник И.В., Никифоров В.С, Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб.: Наука, 2000.
11. Бойчук Л.М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. – М.: Энергия, 1971. – 112 с.
12. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovich P.V. Adaptive nonlinear control without over-parametrization // Syst. Control Lett. 1992. V. 19., P. 177-185.