

УДК 517.968 (575.2) (04)

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО РОДА
С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

М.И. Иманалиев, А. Асанов, Р.А. Асанов

Изучены вопросы существования, несуществования и единственности решения для линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода. Получены формулы для решения таких уравнений.

Ключевые слова: вырожденное ядро; интегральное уравнение третьего рода; существование решения.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение третьего рода.

$$p(t)\varphi(t) = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(t)b_i(s)\varphi(s)ds + f(t), t \in [a, b], \quad (1)$$

Где $p(a)=0$, $p(t)$, $a_i(t)$, $b_i(t)$ и $f(t)$ – известные непрерывные на $[a, b]$ функции, $\varphi(t)$ – искомая непрерывная на $[a, b]$ функция, $-\infty < a < b \leq +\infty$.

Различные вопросы для интегральных уравнений первого и третьего рода исследовались в [1–5]. Но основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [3], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. В данной работе построены решения для линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода.

Всюду будем предполагать, что

$$p(t) = \prod_{i=1}^m p_i(t), p_i(a) = 0, p_i(t) \in C[a, b] i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

Пусть

$$c_i = \int_a^b b_i(s)\varphi(s)ds, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Тогда из (1) получим

$$p(t)\varphi(t) = \sum_{j=1}^n c_j a_j(t) + f(t), t \in [a, b], \quad (4)$$

где c_j неизвестные постоянные, $j = 1, 2, \dots, n$. Предполагая $t=a$, из (4) имеем

$$\sum_{j=1}^n c_j a_j(a) + f(a) = 0. \quad (5)$$

Вычитая (5) из (4) получим

$$p(t)\varphi(t) = \sum_{j=1}^n c_j [a_j(t) - a_j(a)] + [f(t) - f(a)], t \in [a, b]. \quad (6)$$

Предположим выполнение следующих условий:

Для всех $k = 1, 2, \dots, m$ и для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$,

$\alpha_{i,k}(t) \in C[a, b]$, $\alpha_{i,m}(t)b_j(t) \in L_1(a, b)$, где

$$\alpha_{i,k}(t) = \frac{\alpha_{i,k-1}(t) - \alpha_{i,k-1}(a)}{p_k(t)}, \alpha_{i,0}(t) = a_i(t), t \in [a, b], \quad (7)$$

$$\alpha_{i,k}(a) = \lim_{t \rightarrow a} \lim_{t \rightarrow a} \alpha_{i,k}(t);$$

б) Для всех $k = 1, 2, \dots, m$ и для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$,
 $F_k(t) \in C[a, b], F_m(t)b_j(t) \in L_1(a, b)$, где

$$F_k(t) = \frac{F_{k-1}(t) - F_{k-1}(a)}{p_k(t)}, F_0(t) = f(t), t \in [a, b], F_k(a) = \lim_{t \rightarrow a} \lim_{t \rightarrow a} F_k(t). \quad (8)$$

Далее, в силу (2), (7) и (8), для определения неизвестных постоянных c_1, c_2, \dots, c_n из (6) получим следующую систему:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_j a_j(a) + f(a) = 0, \\ \sum_{j=1}^n c_j \alpha_{j,k}(a) + F_k(a) = 0, k = 1, 2, \dots, m-1 \end{cases} \quad (9)$$

Учитывая (9) из (6) имеем:

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^n c_j \alpha_{j,m}(t) + F_m(t), t \in [a, b]. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (3) получим:

$$c_i = \int_a^b b_i(s) \left(\sum_{j=1}^n c_j \alpha_{j,m}(s) + F_m(s) \right) ds, i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Введем следующие обозначения:

$$k_{ij} = \int_a^b \alpha_{j,m}(s) b_i(s) ds, l_i = \int_a^b F_m(s) b_i(s) ds, i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Тогда из (11) получим

$$c_i - \sum_{j=1}^n k_{ij} c_j = F_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Таким образом имеем систему линейных алгебраических уравнений (9) и (13), которая определяет c_i .

Введем следующие обозначения:

$$K = \begin{pmatrix} 1 - k_{11} & -k_{12} & \dots & -k_{1n} \\ -k_{21} & 1 - k_{22} & \dots & -k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -k_{n1} & -k_{n2} & \dots & 1 - k_{nn} \\ a_1(a) & a_2(a) & \dots & a_n(a) \\ \alpha_{11}(a) & \alpha_{21}(a) & \dots & \alpha_{n1}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1,m-1}(a) & \dots & \alpha_{n,m-1}(a) \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \\ -f(a) \\ F_1(a) \\ \dots \\ F_{m-1}(a) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Учитывая (14), запишем систему уравнений (9) и (13) в следующей форме

$$KC = L \quad (15)$$

Теорема. Пусть $r = \text{rang}K$, $r_1 = \text{rang}(K, L)$, где матрицы K и L определены через (14), (7), (8) и (12). Тогда:

Если $r \neq r_1$, то интегральное уравнение (1) не имеет решений в пространстве $C[a, b]$;

Если $r = r_1 = n$, то интегральное уравнение (1) имеет единственное решение в пространстве $C[a, b]$. Это решение определяется формулой (10), где c_1, c_2, \dots, c_n – единственное решение системы (15);

Если $r = r_1 < n$, то интегральное уравнение (1) имеет решение в пространстве $C[a, b]$, которое зависит от $n-r$ параметров. Эти решения определяются формулой (10), где c_1, c_2, \dots, c_n – решения системы (15). Из них $n-r$ – произвольные постоянные, а оставшиеся r зависят от них;

Доказательство

Пусть $r \neq r_1$. Тогда по теореме Кронекера–Капелли система (15) не имеет решений. Таким образом интегральное уравнение (1) не имеет решений в пространстве $C[a, b]$.

Пусть $r = r_1 = n$. Тогда по теореме Кронекера–Капелли система (15) имеет единственное решение. Таким образом интегральное уравнение (1) имеет единственное решение в пространстве $C[a, b]$. Это решение определяется по формуле (10), где c_1, c_2, \dots, c_n – единственное решение системы (15)

Пусть $r = r_1 < n$. Тогда по теореме Кронекера–Капелли система (15) имеет решение, которое зависит от $n-r$ параметров. Поэтому интегральные уравнения имеют решения в пространстве $C[a, b]$, зависящие от $n-r$ параметров. Эти решения определяются по формуле (10), где c_1, c_2, \dots, c_n – решения системы (15). Из них $n-r$ произвольные постоянные, а остальные r зависят от них. *Теорема доказана.*

Пример. Рассмотрим интегральные уравнения (1), где $a=0, b=1$,

$n = 2, p(t) = t\sqrt{t}, a_1(t) = t+1, b_1(t) = t, a_2(t) = t^2 + 3, b_2(t) = t^3, f(t) = t^3 + \beta, \alpha\mu\beta$ – параметры, $a \neq 0$, т.е. рассмотрим уравнение

$$t\sqrt{t}\varphi(t) = \int_0^1 [(t+1)s + \alpha(t^2 + 3)s^3] \varphi(s) ds + t^3 + \beta, t \in [0;1]. \tag{16}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^1 s\varphi(s) ds, \\ c_2 = \int_0^1 s^3\varphi(s) ds. \end{cases} \tag{17}$$

Учитывая (17) из (16) имеем:

$$t\sqrt{t}\varphi(t) = c_1(t+1) + c_2\alpha(t^2 + 3) + t^3 + \beta, t \in [0;1]. \tag{18}$$

Подставляя $t=0$ из (18) получим:

$$c_1 + 3\alpha c_2 = -\beta. \tag{19}$$

Вычитывая (19) от (18) получаем:

$$t\sqrt{t}\varphi(t) = c_1 t + c_2 \alpha t^2 + t^3, t \in [0;1], \text{ т.е.}$$

$$\sqrt{t}\varphi(t) = c_1 + c_2 \alpha t + t^2, t \in [0;1]. \tag{20}$$

Полагая $t=0$, из (20) имеем:

$$c_1 = 0 \tag{21}$$

Учитывая (21), из (20) получим:

$$\varphi(t) = c_2 \alpha \sqrt{t} + t\sqrt{t}, t \in [0;1]. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (17) имеем:

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^1 s(c_2 \alpha \sqrt{s} + s\sqrt{s}) ds, \\ c_2 = \int_0^1 s^3(c_2 \alpha \sqrt{s} + s\sqrt{s}) ds. \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = (2\alpha c_2 \frac{s^{\frac{5}{2}}}{5} + 2 \frac{s^{\frac{7}{2}}}{7}) \Big|_0^1, \\ c_2 = (2\alpha c_2 \frac{s^{\frac{9}{2}}}{9} + 2 \frac{s^{\frac{11}{2}}}{11}) \Big|_0^1, \end{array} \right. \text{ т.е. } \left\{ \begin{array}{l} c_1 - \frac{2\alpha}{5} c_2 = \frac{2}{7}, \\ \left(\frac{9-2\alpha}{9} \right) c_2 = \frac{2}{11}. \end{array} \right. \quad (23)$$

Тогда, решая систему уравнений (19), (21) и (23), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = 0, \\ c_2 = -\frac{1}{3\alpha} \beta, \\ c_2 = -\frac{5}{7\alpha}, \\ c_2 = \frac{18}{11(9-2\alpha)}. \end{array} \right. \quad (24)$$

Тогда имеют место следующие случаи:

Если $\alpha = -\frac{495}{16}, \beta \neq \frac{15}{7}$, то система уравнений (24) не имеет решения. Поэтому интегральные уравнения (16) не имеют решений.

Если $\alpha = -\frac{495}{16}, \beta = \frac{15}{7}$, то система уравнений (24) имеет единственное решение $c_1 = 0, c_2 = \frac{16}{693}$, которое определяется по формуле (19). Поэтому интегральное уравнение (16) имеет единственное решение: $\varphi(t) = -\frac{5}{7}\sqrt{t} + t\sqrt{t}, t \in [0;1)$.

Если $\alpha \neq -\frac{495}{16}$, то система уравнений (24) не имеет решения. Поэтому интегральные уравнения (16) не имеют решений.

Литература

1. Цалюк З.Б. Итоги науки и техники. Сер. матем. анализ. – М., 1977. – Т. 15. – С. 131–198.
2. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1979. – Т. 19. – №4. – С. 970–989.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
4. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 309. – №5. – С. 1052–1055.
5. Иманалиев М.И., Асанов А. Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Докл. РАН. – 2007. – Т. 415. – №1. – С. 14–17.