

УДК 517.97 (575.2) (04)

СЛАБООБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.К. Керимбеков, Т. Ю. Урывская

Исследовано уравнение теплопередачи с переменными коэффициентами. Введено понятие решения слабообобщенного решения, уравнения теплопередачи с разрывным коэффициентом, являющейся функцией от времени. Разработан алгоритм слабообобщенного решения.

Ключевые слова: слабообобщенное решение; нелинейное интегральное уравнение; дифференциальное неравенство; оптимальное управление.

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый скалярной функцией $V(t, x)$, которая удовлетворяет в области $Q=(0,1) \times (0, T)$ уравнению теплопередачи [1]:

$$V_t = V_{xx} + a(t) + g(x)f[t, u(t)], \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

а на границе Q начальным

$$V(0, x) = \Psi(x), \quad x \in (0, 1) \quad (2)$$

и граничным

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad (3)$$

$$\alpha > 0, \quad t \in (0, T),$$

условиям, $a(t) \in H(0, T)$, $g(x) \in H(0, 1)$, $\Psi(x) \in H(0, 1)$ – заданные функции, $f[t, u(t)]$ – функция внешнего воздействия, которая нелинейно зависит от функции управления $u(t) \in H(0, T)$, H – гильбертово пространство, T фиксировано.

Решение краевой задачи (1)–(3) ищем в виде

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x), \quad V_n(t) = \int_0^1 V(t, x) z_n(x) dx, \quad (4)$$

где $\{z_n(x)\}$ – полная ортонормированная система собственных функций краевой задачи

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad (5)$$

$$X'(1) + \alpha X(1) = 0, \quad \alpha > 0,$$

а $\{\lambda_n\}$ – собственные значения, которые определяются как решение трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda = \alpha$ и обладают следующими свойствами

$$\lambda_n \leq \lambda_n + 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty, \quad (6)$$

$$n\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Определение 1. Любая функция $V(t, x) \in H(Q)$, которая при каждом фиксированном

управлении $u(t) \in H(0, T)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [e^{-\lambda_n^2 t} \Psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} a(\tau) V_n(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} g_n f[\tau, u(\tau)] d\tau] z_n(x), \quad (7)$$

где Ψ_n, g_n – коэффициенты Фурье соответственно функций $\Psi(x), g(x)$, называется слабообобщенным решением краевой задачи (1)–(3).

То, что краевая задача (1)–(3) эквивалентна тождеству (7) проверяется непосредственным вычислением и не представляет труда. Рассмотрим интегральное уравнение (7), переписав его в операторной форме

$$V = K[V] + F[x, u] + h, \quad (8)$$

где

$$K[V] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} a(\tau) V_n(\tau) d\tau z_n(x), \quad (9)$$

$$F[x, u] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} g_n f[\tau, u(\tau)] d\tau z_n(x), \quad (10)$$

$$h = h(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \Psi_n z_n(x). \quad (11)$$

Лемма 1. h является элементом пространства $H(0, 1)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из неравенства:

$$\int_0^T \int_0^1 h^2(t, x) dx dt = \int_0^T \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \Psi_n z_n(x) \right)^2 dx dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} [e^{-2\lambda_n^2 t} \Psi_n^2] dt \leq T \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^2 = T \| \Psi(x) \|_H^2 < \infty,$$

где символом $\|\cdot\|_H$ – обозначена норма в пространстве H .

Лемма 2. Оператор $K[V]$, действующий по формуле (9), отображает пространство $H(Q)$ в себя, то есть $K: H(Q) \rightarrow H(Q)$.

Доказательство. Пусть $V(t,x)$ произвольный элемент пространства $H(Q)$. Утверждение леммы следует из неравенства

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 K^2[V] dx dt = \\ & = \int_0^T \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} a(\tau) V_n(\tau) d\tau \tau_n(x) \right)^2 dx dt \leq \\ & \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} a(\tau) V_n(\tau) d\tau \right)^2 \leq \\ & \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} |a(\tau)|^2 d\tau \int_0^T V_n(\tau) d\tau dt \leq \\ & \leq T \|a(t)\|_H^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T V_n^2(\tau) d\tau = \\ & = T \|a(t)\|_H^2 \|V(t,x)\|_H^2 < \infty. \end{aligned} \tag{12}$$

Лемма 3. При выполнении условия $\sqrt{T} \|a(t)\|_H < 1$

оператор $K[V]$ является сжимающим.

Доказательство. Поскольку оператор $K[V]$ является линейным, то утверждение леммы следует из неравенства (12).

Лемма 4. Пусть при каждом $u(t) \in H(0,T)$ функция $f[t,u(t)] \in H(0,T)$, т.е. $f: H(0,T) \rightarrow H(0,T)$. Тогда оператор $F[x,u]$ отображает пространство $H(0,T)$ в себя, т.е. $F: H(0,T) \rightarrow H(0,T)$.

Доказательство. Пусть $u(t)$ произвольный элемент пространства $H(0,T)$. Утверждение леммы следует из неравенства:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 F^2[x,u(t)] dx dt = \int_0^T \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n f[\tau,u(\tau)] d\tau \tau_n(x) \right)^2 dx dt = \\ & = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n f[\tau,u(\tau)] d\tau \right)^2 dt \leq \\ & \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T g_n^2 e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \int_0^T f^2[\tau,u(\tau)] d\tau \leq \\ & \leq T^2 \|g(x)\|_{H(0,1)}^2 \|f[t,u(t)]\|_{H(0,T)}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

- 1) $f: H(0,T) \rightarrow H(0,T)$, т.е. при каждом $u(t) \in H(0,T)$ функция $f[t, u(t)]$ является элементом пространства $H(0,T)$;

- 2) функция $f[t, u(t)]$ является монотонной функцией относительно функциональной переменной $u(t) \in H(0,T)$, т.е.

$$\frac{\partial f[t, u(t)]}{\partial u} \neq 0, \quad t \in (0, T); \tag{14}$$

- 3) для функции $a(t) \in H(0,T)$ имеет место неравенство

$$\sqrt{T} \|a(t)\|_{H(0,T)} < 1. \tag{15}$$

Тогда краевая задача (1)–(3) при каждом $u(t) \in H(0,T)$ в пространстве $H(Q)$ имеет единственное слабообобщенное решение.

Доказательство. $H(Q)$ является полным линейным нормированным пространством. Утверждение теоремы следует из результатов Лемм 1–4 [2].

Слабообобщенное решение краевой задачи (1)–(4) может быть найдено методом последовательных приближений, по формуле

$$V_n = K_0[V_{n-1}], \tag{16}$$

где $K_0[V] = K[V] + F[x, u] + h$.

При этом приближенное решение $V_n(t,x)$ удовлетворяет оценке

$$\|V(t,x) - V_n(t,x)\| \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|K_0[V_0] - V_0\|_{H(Q)}, \tag{17}$$

где V_0 – произвольный элемент пространства $H(Q)$,

$$\gamma = \sqrt{T} \|a(t)\|_{H(0,T)}.$$

Заметим, что слабообобщенное решение краевой задачи (1)–(3) также можно построить методом повторных ядер [3]. Согласно представлениям (4) и (7) относительно $V_n(t)$ имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} V_n(t) &= e^{-\lambda_n^2 t} \Psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} a(\tau) V_n(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n f[\tau, u(\tau)] d\tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{18}$$

При каждом фиксированном n (18) можно рассматривать как линейные неоднородные интегральные уравнения

$$V_n(t) = \int_0^t K_n(t,\tau) V_n(\tau) d\tau + q_n(t), \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned} K_n(t,\tau) &= e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} a(\tau), \\ q_n(t) &= e^{-\lambda_n^2 t} \Psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n f[\tau, u(\tau)] d\tau. \end{aligned} \tag{20}$$

Решение уравнения (19) находим по формуле

$$V_n(t) = q_n(t) + \int_0^t R_n(t, \tau) q_n(\tau) d\tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (21)$$

где резольвента $R_n(t, \tau, 1)$ определяется соотношениями:

$$R_n(t, \tau, 1) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i, \quad (22)$$

$$K_n^i(t, \tau) = \int_{\tau}^t K_n(t, s) K_n^{i-1}(s, \tau) ds,$$

$$i = 2, 3, 4, \dots, K_n^1(t, \tau) \equiv K_n(t, \tau).$$

Поскольку

$$1) \int_0^T \int_0^T K_n^2(t, \tau) d\tau dt = \int_0^T \int_0^T e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} a^2(\tau) d\tau dt \leq T e^{-2\lambda_n^2 T} \|a(t)\|_H^2 < \infty$$

$$2) \int_0^T q_n^2(t) dt \leq 2 \left[\int_0^T e^{-2\lambda_n^2 t} \Psi_n^2 dt + \int_0^T \left(\int_0^t e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} g_n f[\tau, u(\tau)] d\tau \right)^2 dt \right] \leq \frac{1}{\lambda_n^2} (1 - e^{-2\lambda_n^2 T}) [\Psi_n^2 + T g_n^2 \|f[t, u(t)]\|_H^2] < \infty,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

то ряд (22) сходится почти всюду в квадрате $(0, T) \times (0, T)$. Таким образом, интегральное уравнение (19) при каждом фиксированном $n = 1, 2, 3, \dots$, имеет единственное решение:

$$V_n(t) = (e^{-\lambda_n^2 t} + \int_0^t R_n(t, \tau, 1) e^{-\lambda_n^2 \tau} d\tau) \Psi_n + \int_0^t (e^{-\lambda_n^2(t-s)} + \int_s^t R_n(t, \tau, 1) e^{-\lambda_n^2(\tau-s)} d\tau) g_n f[s, u(s)] ds. \quad (23)$$

Заметим, что интегральное уравнение (19) и задача Коши

$$V_n'(t) = [-\lambda_n^2 + a(t)] V_n(t) + g_n f[t, u(t)], \quad (24)$$

$$V_n = \Psi_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

эквивалентны. Решение задачи Коши (24) находим по формуле:

$$V_n(t) = e^{\int_0^t [-\lambda_n^2 + a(s)] ds} \Psi_n + \int_0^t e^{\int_0^{\tau} [-\lambda_n^2 + a(s)] ds} g_n f[\tau, u(\tau)] d\tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

Сравнивая (23) и (25) получим формулу

$$e^{\int_0^t [-\lambda_n^2 + a(\xi)] d\xi} = e^{-\lambda_n^2(t-s)} + \int_s^t R_n(t, \tau, 1) e^{-\lambda_n^2(\tau-s)} d\tau, \quad (26)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

которая может оказаться полезной.

Лемма 5. Функция (4), где $V_n(t)$ имеет вид (23), является элементом пространства $H(Q)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из неравенства:

$$\int_0^T \int_0^1 V^2(t, x) dx dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2(t) dt \leq \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} [M_0 \Psi_n^2 + T M_0 \|f[t, u(t)]\|_H^2 g_n^2] = = 2 M_0 [\|\Psi(x)\|_H^2 + T \|f[t, u(t)]\|_H^2 \|g(x)\|_H^2] < \infty,$$

где

$$e^{-\lambda_n^2 t} + \int_0^t R_n(t, \tau, 1) e^{-\lambda_n^2 \tau} d\tau \leq M_0,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, t \in (0, T).$$

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
2. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
3. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 304 с.