

О ВНЕШНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ПОЛНОТЫ ПО ЧЕХУ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

А.А. Чекеев, М.А. Абдраимова

Устанавливается равномерно полное по Чеху расширение и даётся его характеристика в своем Самуэловском бикompактом расширении.

Ключевые слова: \mathfrak{K} -полнота; \mathfrak{K} -фильтр Коши; равномерная полнота по Чеху.

Данная работа посвящена характеристике полноты по Чеху равномерных пространств “внутри” своих Самуэловских расширений. Мы будем использовать результаты и понятия из наших предыдущих работ [1, 2], а обозначения и терминологию из книг [3–5]. Новая необходимая информация будет введена дополнительно.

Пусть uX – равномерное пространство и $\mathfrak{K} \subset u$ – произвольная система равномерных покрытий. Фильтр \mathfrak{F} на uX называется \mathfrak{K} -фильтром Коши в uX , если $\alpha \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$, для любого $\alpha \in \mathfrak{K}$.

Определение 1 ([5, 6]). Пусть uX – равномерное пространство $\mathfrak{K} \subset u$. Равномерное пространство и X называется \mathfrak{K} -полным, а система \mathfrak{K} называется полной, если всякий \mathfrak{K} -фильтр Коши \mathfrak{F} имеет по крайней мере одну точку прикосновения, т.е. $\bigcap \{\overline{F} : F \in \mathfrak{F}\} \neq \emptyset$.

Лемма 2 (Лемма 1.2.11 [7]). Пусть uX - \mathfrak{K} – полное равномерное пространство, где $\mathfrak{K} \subset u$. Тогда существует такая псевдоравномерность $\mathfrak{B}_{\mathfrak{K}} \subset u$, что $|\mathfrak{B}_{\mathfrak{K}}| = |\mathfrak{K}|$ и $uX - \mathfrak{B}_{\mathfrak{K}}$ – полное равномерное пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $uX-\mathfrak{K}$ – полное равномерное пространство, где $\mathfrak{K} \subset u$. Через \mathfrak{K} обозначим все такие нормальные покрытия $\varphi_\alpha = \{\alpha_n : n \in N\} \subset u$, что $\alpha_1 = \alpha$, где $\alpha \in \mathfrak{K}$, т.е. $\mathfrak{K}' = \cup \{u_\alpha : \alpha \in \mathfrak{K}\}$. Тогда $|\mathfrak{K}'| = |\mathfrak{K}|$. Пусть \mathfrak{K}'' – всевозможные конечные внутренние пересечения покрытий из \mathfrak{K} . Тогда, снова $|\mathfrak{K}''| = |\mathfrak{K}'| = |\mathfrak{K}|$. Теперь через \mathfrak{B} обозначим систему, состоящую из всех покрытий, в каждое из которых можно вписать покрытие из \mathfrak{K}'' . Тогда $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{K}''| = |\mathfrak{K}'| = |\mathfrak{K}|$ и построению, всякий фильтр \mathfrak{F} , обладающей свойством $\mathfrak{F} \cap \beta \neq \emptyset, \forall \beta \in \mathfrak{B}$, тем более обладает свойством $\mathfrak{F} \cap \alpha \neq \emptyset$ для любого $\alpha \in \mathfrak{K}$. Следовательно, система $\mathfrak{B}_{\mathfrak{K}}$ является полной, так как полной является система \mathfrak{K} .

Предложение 4. Пусть uX – равномерное пространство и $\mathfrak{K} \subset u$ некоторое семейство покрытий. Если $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$ база \mathfrak{K} -фильтра Коши \mathfrak{F} и $\mathfrak{B}_{\mathfrak{K}}$ – псевдоравномерность порожденная семейством \mathfrak{K} . Тогда семейство $\mathfrak{F}' = \{\alpha(F) : F \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{K}}, F \in \mathfrak{F}'\}$ является базой минимального \mathfrak{K} -фильтра Коши $\mathfrak{F}_m \subseteq \mathfrak{F}$, содержащегося в \mathfrak{F} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО производится аналогично доказательству утверждения о минимальных фильтрах равномерного пространства ([5]), поэтому опускается.

Следствие 4.1. Всякий минимальный \mathfrak{K} -фильтр Коши является u -системой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО производится аналогично доказательству предложения 3.5. из [1], поэтому мы его опускаем.

В работе [2] при характеристике полноты и пополнения равномерного пространства из всех u -ультрафильтров выделялись u -ультрафильтры Коши. Ниже мы из всех u -ультрафильтров выделим u - \mathfrak{K} -ультрафильтры Коши.

Определение 5. \mathfrak{K} -фильтр Коши в равномерном пространстве uX , являющийся u -системой, называется u - \mathfrak{K} -фильтром Коши.

Определение 6. Максимальный u - \mathfrak{K} -фильтр Коши будет называться u - \mathfrak{K} -ультрафильтром Коши.

Следующие предложения являются аналогом предложений 5, 6 из [2] и доказательства их аналогичны, поэтому мы их опускаем.

Предложение 7. Система ξ , являющаяся u -ультрафильтром, есть \mathfrak{K} -фильтр Коши тогда и только тогда, когда ξ является u - \mathfrak{K} -ультрафильтром Коши.

Предложение 8. Равномерное пространство uX \mathfrak{K} – полно тогда и только тогда, когда в нем сходится всякий u - \mathfrak{K} -ультрафильтр Коши.

Замечание 9. Отметим, что всякая точка прикосновения u - \mathfrak{K} -ультрафильтра Коши является его пределом. Действительно пусть x точка прикосновения u - \mathfrak{K} -ультрафильтра ξ и ξ_x – семейство всех открытых окрестностей точка X , которое является u -ультрафильтром (см. предложение 2.6. [1]). Тогда, так как $x \in \cap \{\bar{K} : K \in \xi\}$, для любого $U \in \xi_x, U \cap K \neq \emptyset$. Это означает, что $K \in \xi$ элемент ξ_x , т.е. $\xi \subseteq \xi_x$ и наоборот, каждое $U \in \xi_x$ элемент ξ , т.е. $\xi_x \subseteq \xi$. Итак, $\xi \subseteq \xi_x$. (Можно также использовать предложение 7.)

Через $c_u X$ обозначим часть $b_u X$ состоящую из всех u - \mathfrak{K} -ультрафильтров Коши равномерного пространства uX , где $\mathfrak{B}_{\mathfrak{K}} \subset u$ некоторая псевдоравномерность, порожденная семейством $\mathfrak{K} \subset u$. Для каждого $\alpha \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{K}}$ положим $U_\alpha = \cup \{O_u \langle A \rangle : A \in \mathfrak{K}\}$, где $O_u \langle A \rangle$ – оператор, определенный в работе [1].

Предложение 10. Имеет место цепочка включений $X \subseteq \mu_u X \subseteq U_\alpha \subseteq b_u X$ для любого $\alpha \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{K}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $X \subseteq \mu_u X$ следует из теоремы 13 ([2]). Включение $\mu_u X \subseteq U_\alpha$ следует из того факта, что любой u -ультрафильтр Коши является всегда u - \mathfrak{K} -ультрафильтром Коши, где $\alpha \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{K}}$. Включения $U_\alpha \subseteq b_u X$ вытекают из определения U_α .

Теорема 11. Имеет место равенство $\check{c}_u X = \cap \{U_\alpha : \alpha \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{K}}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО производится аналогично доказательству теоремы 13 ([2]), заменой базы \mathfrak{B} равномерности u на псевдоравномерность $\mathfrak{K} \in u$.

Теорема 12. Семейство $\mathfrak{B}_v = \{\alpha_v : \alpha \in \mathfrak{B}\}$, где $\alpha_v = \{C_u X \cap O_u \langle A \rangle : A \in \alpha\}$ является базой некоторой равномерности u_v на $\check{c}_u X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО производится аналогично доказательству теоремы 13 в работе [8].

Теорема 13. Равномерное пространство $\check{c}_u X$ является $\check{\mathfrak{K}}$ – полным равномерным расширением равномерного пространства uX , где $\check{\mathfrak{K}} = \{\alpha_v : \alpha \in \mathfrak{K}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы видели выше $X \subseteq \mu_u X \subseteq \check{c}_u X = b_u X$, следовательно, $\check{c}_u X$ – тихоновское пространство и $\bar{X} = \check{c}_u X$. Равномерность u продолжается до равномерности u_v на $\check{c}_u X$. Итак, равномерное пространство $\check{c}_u X$

равномерное расширение uX . Покажем, что $\check{c}_u X$ является $\check{\mathfrak{K}}$ – полным. Пусть \mathfrak{F} – минимальный $\check{\mathfrak{K}}$ -фильтр Коши в равномерном пространстве $\check{c}_u X$. Тогда он является u -системой и $F \cap X \neq \emptyset$, для любого $F \in \mathfrak{F}$, так как $\langle F \rangle \neq \emptyset$ (см. предложение 4 и следствие 4.1). Система $\eta = \{F \cap X : F \in \mathfrak{F}\}$ является центрированной u -системой Коши, так как $\mathfrak{F} \cap \alpha_\nu \neq \emptyset$ для любого $\alpha \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{K}}$. Пусть ξ - u - \mathfrak{K} -ультрафильтр Коши, содержащий η , т.е. $\eta \in \xi$. Тогда, $\bigcap \{O_u \langle K \rangle : K \in \xi\} = \{\xi\}$, $\mathfrak{F} \subseteq \{O_u \langle K \rangle : K \in \xi\}$ и точка ξ является точкой прикосновения фильтра \mathfrak{F} так как $O_u \langle K \rangle \cap F \neq \emptyset$, для любых $K \in \xi$ и $F \in \mathfrak{F}$. Итак, $\xi \in \bigcap \{\overline{F} : F \in \mathfrak{F}\}$ (см. лемму 3.9 [1]). Тем самым доказано, что $\check{c}_u X - \check{\mathfrak{K}}$ – полное равномерное пространство.

Определение 14 ([5, 6]). \mathfrak{K} – полное равномерное пространство uX , где $|\mathfrak{K}| \leq \aleph_0$, называется равномерно полным по Чеху.

Следствие 13.1. Каждое равномерное пространство uX имеет равномерно полное по Чеху расширение $\check{c}_u X$.

Следствие 13.2. Каждое тихоновское пространство X выкладывается в полный по Чеху паракомпакт в качестве всюду плотного подпространства.

Следствие 13.3. Пространство uX равномерно полно по Чеху тогда и только тогда, когда uX совпадают со своим равномерным расширением $\check{c}_u X$.

Следствие 13.4. Равномерно полное по Чеху расширение $\check{c}_u X$ равномерного пространства uX G_δ – расположено в $S_u X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из равенства $\check{c}_u X = \bigcap \{u_\alpha : \alpha \in \mathfrak{K}\}$, где $|\mathfrak{K}| \leq \aleph_0$.

Следствие 13.5. Равномерно полное по Чеху пространство uX G_δ – расположено в $S_u X$.

Следствие 13.5 имеет обращение, т.е. если равномерное пространство uX G_δ расположено в $S_u X$, тогда uX равномерно полно по Чеху. Для доказательства этого факта нам потребуется дополнительная информация, которую мы приведем ниже.

Пусть (X, d) – псевдометрическое пространство. Положим “ $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $d(x, y) = 0$ ”. Отношение “ \sim ” является отношением эквивалентности. Множество $Y = X / \sim$ наделяется метрикой $\rho(\eta, \eta) = d(\pi^{-1}(y_1), \pi^{-1}(y_2))$ для любых $y_1, y_2 \in Y$, где $\pi : X \rightarrow Y = X / \sim$

– естественная проекция. Оказывается $\rho(y_1, y_2) = d(x, z)$ для любых $x \in \pi^{-1}(y_1)$ и $z \in \pi^{-1}(y_2)$ и имеет место следующая теорема.

Теорема 14 (4.15 [8]). Пусть (X, d) – псевдометрическое пространство и $Y = X / \sim$, где $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $d(x, y) = 0$. Тогда $\rho(y_1, y_2) = d(\pi^{-1}(y_1), \pi^{-1}(y_2))$ – метрика на Y для любых $y_1, y_2 \in Y$, где $\pi : X \rightarrow Y$ – естественная проекция. Отображение $\pi : X \rightarrow Y$ является факторным топологически и изометрической метрического пространства (X, d) на метрическое пространство (Y, ρ) .

Следствие 14.1. Для любого $\varepsilon > 0$ имеем $\pi(O_\varepsilon(x)) = O_\varepsilon(y)$ и $\pi^{-1}(O_\varepsilon(y)) = O_\varepsilon(x)$, где $y = \pi(x)$ и $O_\varepsilon(x) = \{x' \in X : d(x, x') < \varepsilon\}$ и $O_\varepsilon(y) = \{y' \in Y : \rho(y, y') < \varepsilon\}$.

Теорема 15 ([5] лемма 0.3.2 [3]). Пусть $\{\alpha_n : n \in N\}$ – последовательность покрытий множества X такая, что α_n звездно вписано в α_n при каждом $n \in N$. Тогда на множестве X существует такая псевдометрика ρ , что выполнено условие:

$$\alpha_{n+1}(x) \subset \{y : \rho(x, y) < 2^{-(n+1)}\} \subset \alpha_n(x) (*)$$

для любого элемента $x \in X$ и каждого $n \in N$.

Теперь из теорем 14, 15 выводится, на наш взгляд, очень важная теорема, характеризующая базу равномерности в терминах равномерно конуль (нуль)-множеств. Напомним, что покрытие называется равномерно открытым (замкнутым), если оно состоит из равномерно конуль (нуль)-множеств.

Теорема 16. Каждая равномерность u на тихоновском пространстве X обладает базой, состоящей из всех локально конечных равномерно открытых (замкнутых) покрытий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u – равномерность на тихоновском пространстве X и $\alpha \in M$ – произвольное равномерное покрытие. Тогда существует такая последовательность $\{\alpha_n : n \in N\}$ равномерных покрытий, что α_1 звездно вписано в α и α_{n+1} звездно вписано в α_n для каждого $n \in N$. Тогда по теореме 15 существует псевдометрика ρ на X со свойством (*), т.е. $\alpha_{n+1}(x) \subset O_{2^{-(n+1)}}(x) \subset \alpha_n(x)$, где $O_{2^{-(n+1)}}(x) = \{z : \rho(x, z) < 2^{-(n+1)}\}$ для всех $x \in X$ и всех $n \in N$. Ясно, что при $n=1$ имеем покрытие $\beta = \{O_{4^{-1}}(x) : x \in X\}$, вписанное в α . По теореме 14 имеем равномерно непрерывное отображение $f : uX \rightarrow (Y, d)$, $f = \pi \circ 1$, где $1 : uX \rightarrow (X, \rho)$ тождественное отображение и $\pi : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$

естественная проекция, как в теореме 14. Ясно, что $f^{-1}(O_{4^{-1}}(y)) = O_{4^{-1}}(x)$, где $y = f(x)$ (следствие 14.1). Покрытие $\beta = \{O_{4^{-1}}(y) : y \in Y\}$ – открытое покрытие метрического пространства (Y, d) . Метрическое пространство (Y, d) – паракомпактно ([4, 8]), поэтому в открытое покрытие β можно вписать открытое локально конечное покрытие γ , а в γ можно вписать замкнутое локально конечное покрытие γ' ([4]). Теперь легко доказать, что покрытия $f^{-1}(\gamma)$ и $f^{-1}(\gamma')$ локально конечны, $f^{-1}(\gamma)$ – равномерно открыто ([7]), а покрытие $f^{-1}(\gamma')$ – равномерно замкнуто ([7]). Причем $f^{-1}(\gamma)$ вписано в покрытие $\{\alpha_i(x) : x \in X\}$, а $f^{-1}(\gamma')$ вписано в $f^{-1}(\gamma)$, следовательно, получаем искомую вписанность покрытий $f^{-1}(\gamma')$ в $f^{-1}(\gamma)$, а $f^{-1}(\gamma)$ в α . В силу произвольности α получаем, что все локально конечные равномерно открытые (замкнутые) покрытия образуют базу равномерности u .

Предложение 17. Пусть равномерное пространство $uX G_\delta$ – расположено в $S_u X$. Тогда uX равномерно полно по Чеху.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = \bigcap \{U_i : i \in N\}$, где U_i открыто в $S_u X$ для всех $i \in N$. По теореме 3.8 ([1]), имеем $U_i = \bigcup \{O_u \langle A_i \rangle : O_n \langle A_i \rangle \in \langle Q \rangle\}$, $i \in N$, где A_i – можно считать равномерно конульмножеством (по теореме 16). Для каждого $i \in N$ подмножества U_i – локально компактно, как открытое подпространство бикompакта $S_u X$. Следовательно, у каждой точки $p \in S_u X$ существует такая окрестность V_p , что V_p компактно в $S_u X$. Пусть α_i такое семейство, что $U_i = \bigcup \{O_u \langle A_i \rangle : A_i \in \alpha_i\}$. Тогда α_i покрытие X , так как $X \subset U_i$ для каждого $i \in N$. Для каждой точки $x \in X$ существует окрестность $O_x = V_x \cap X$, пересекающаяся с конечным числом элементов покрытия α_i . Это следует из свойства (с) предложения 2.12 ([1]). Итак, α_i – локально конечное равномерно открытое покрытие для каждого $i \in N$. Система $\mathfrak{K} = \{\alpha_i : i \in N\}$ счетна $X = \bigcap \{U_i : i \in N\}$, где $U_i = \bigcup \{O_u \langle A_i \rangle : A_i \in \alpha_i\}$, следовательно, по

лемме 2 и теореме 13, uX - \mathfrak{K} – полно, а так как $|\mathfrak{K}| \leq \aleph_0$, тогда uX – равномерно полно по Чеху.

Теперь объединяя следствие 13.5 и предложение 17 сформируем теорему – характеристику равномерности полных по Чеху равномерных пространств в своем Самуэловском расширении.

Теорема 18. Следствие условия для равномерного пространства uX равносильны:

(1) uX равномерно полно по Чеху.

(2) $uX G_\delta$ – расположено в $S_u X$.

(3) $S_u X / X$ σ – компактно в $S_u X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) \Rightarrow (2). Следует из следствия 13.5.

(2) \Rightarrow (1). Следует из предложения 17.

(2) \Rightarrow (3). Пусть $X = \bigcap \{U_i : i \in N\}$, где U_i – открыто в $S_u X$. Тогда по закону де-Моргана $S_u X \setminus X = \bigcup \{S_u X \setminus U_i : i \in N\}$ и $S_u X \setminus U_i$ компактно в $S_u X$ для каждого $i \in N$.

(3) \Rightarrow (2). Пусть $S_u X \setminus X = \bigcup \{K_i : i \in N\}$, где K_i компактно в $S_u X$ для любого $i \in N$. Итак, $X G_\delta$ – расположено в $S_u X$. Теорема 18 доказана.

Литература

1. Чекеев А.А., Абдраимова М.А. О новом подходе к построению бикompактных расширений равномерных пространств // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – 2009 (в печати).
2. Чекеев А.А., Абдраимова М.А. О внешней характеристике полноты и пополнения равномерных пространств // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – 2009 (в печати).
3. Isbell J.R. Uniform spaces. – Providence, 1964.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986.
5. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. – Фрунзе: Илим, 1990.
6. Wilhelm M. Criteria of openness for relations// Fund. Math. – 1981. – V. 124. – P. 219–228.
7. Charalambous M.G. Uniform Dimension Function. Ph. D. dissertation. Univ. of London, 1971.
8. Келли. Общая топология. – М.: Наука, 1981.