

УДК 528.235 (575.2) (04)

ВЫВОД ФОРМУЛ СВЯЗИ ПРОЕКЦИИ МЕРКАТОРА И UTM СО СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИЕЙ ГАУССА

О.В. Зенин

Данная проекция и система координат может применяться для практического использования в области изысканий, проектирования и строительства зданий, гидротехнических сооружений, подземных разработок, для туннелей, так как отпадает необходимость перерасчета линейных и угловых измерений из-за кривизны земной поверхности.

Ключевые слова: проекция, здание, сооружения, подземные разработки, измерения.

Проекция Меркатора имеет большие линейные искажения и редукиции углов на краях зон, что затрудняет ее использование в полной мере для инженерно-геодезических работ в современных условиях. Однако она обладает тем преимуществом, что дает единообразную систему зональных прямоугольных координат. В принципе, любая из точек осевого меридиана каждой зоны может быть принята за начало новой системы в прежней ориентировке. В связи с этим можно всю зону разделить на локальные геодезические системы и тем самым без потери общности достичь упрощения формул решения редукиционной задачи новой проекции.

Локальная система координат должна иметь строгую математическую связь с проекцией Меркатора. Для инженерно-геодезических работ Кыргызстана наилучшим образом подходит конформная стереографическая проекция Гаусса с малыми искажениями. Рассмотрим ее не в обычном варианте, а с ориентировкой в трех или шестиградусных зонах, совместив начало координат локальной системы с осевым меридианом. Тогда всякое отображение одной плоскости на другую согласно теореме конформного преобразования приведет к аналитической функции от комплексных прямоугольных координат. Эту функциональную зависимость выражают формулами:

$$\begin{aligned} x_r &= f(x_m) - \frac{y_m^2}{2} f''(x_m) + \frac{y_m^4}{24} f^{IV}(x_m) + \dots; \\ y_r &= y_m f'(x_m) - \frac{y_m^3}{6} f'''(x_m) + \frac{y_m^5}{120} f^V(x_m) + \dots. \end{aligned} \quad (1)$$

Главным вопросом для решения уравнений (1) является определение основной характеристической функции, которую автор получил в виде выражения:

$$\begin{aligned} x_{m0} &= x_m + \frac{x^3(1 + 2\eta_0^2)}{12N_0^2} - \frac{t_0\eta_0^2(3 + 4\eta_0^2)x_m^4}{24N_0^3} + \\ &+ \frac{x_m^5}{120N_0^4} (1 + \eta_0^2 + 3t_0^2\eta_0^2). \end{aligned}$$

Для инженерно-геодезических работ с точностью до r_0^4 можно написать:

$$x_{m0} = f(x_m) = x_m + \frac{x_m^3}{12M_0^2} - \frac{x_m^4 r_0^2}{8N_0^3} + \frac{x_m^5}{120N_0^4}. \quad (2)$$

Вычислив производные от (2) и подставив их (1), получим:

$$x_r = x_m - \frac{x_m y_m^2}{4M_0^2} + \frac{x_m^3}{12M_0^2} - \frac{t_0 r_0^2}{8N_0^3} (x_m^4 - 6x_m^2 y_m^2 + y_m^4); \quad (3)$$

$$y_r = y_m + \frac{x_m^2 y_m}{4M_0^2} - \frac{y_m^3}{12M_0^2} - \frac{t_0 t_0^2}{2N_0^3} (x_m^3 y_m - x_m * y_m^3).$$

В пределах ширины трехградусной зоны значения координат для исходных пунктов в новой системе координат можно вычислять по более компактным формулам:

$$\begin{aligned} x_r &= x_m - \frac{x_m y_m^2}{4M_0^2} + \frac{x_m^3}{12M_0^2}; \\ y_r &= y_m + \frac{x_m^2 y_m}{4M_0^2} - \frac{y_m^3}{12M_0^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Довольно просто теперь можно найти связь дирекционных углов обеих проекций. Для этого в формуле:

$$tg \alpha_r = \frac{\Delta y_r}{\Delta x_r} = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)_r$$

значения координат необходимо заменить из (3) через координаты Меркатора. Выполняя преобразования, получим:

$$\alpha_r = \alpha_m + \frac{x_m y_m}{2M_0^2} \rho'' + \frac{\Delta x \Delta y}{24 M_0^2} \rho'''. \quad (5)$$

Аналогичным образом можно определить из решения обратной геодезической задачи и длину линии в стереографической проекции. Однако редуцированную задачу проекции лучше решить иначе. Для этого в аналитических преобразованиях проекции будем использовать не обычные, а редуцированные масштабы в трех выбранных точках хорды. Обозначим редуцированный масштаб изображения через m_m^r . Он получается из выражения:

$$m_m^r = \frac{m_r}{m_m} = \frac{dS_r}{dS_m} = \frac{dy_r}{dy_m} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{dx_m^2}{dy_m^2} \frac{dy_m^2}{dy_m^2} \right). \quad (6)$$

Вычислим, продифференцировав (III) по x или y , редуцированный масштаб и напомним его для точек I, средней m и II хорды.

$$\begin{aligned} m_{m1}^r &= 1 + \frac{x_1^2 - y_1^2}{4M_0^2} + \frac{t_0 \tau_0^2}{2N_0^3} (3x_1 y_1^2 - x_1^3); \\ m_m^r &= 1 + \frac{x_m^2 - y_m^2}{4M_0^2} + \frac{t_0 \tau_0^2}{2N_0^3} (3x_m y_m^2 - x_m^3); \quad (7) \\ m_{m2}^r &= 1 + \frac{x_2^2 - y_2^2}{4N_0^2} + \frac{t_0 \tau_0^2}{2N_0^2} (3x_2 y_2^2 - x_2^3). \end{aligned}$$

После математических преобразований формулы получим:

$$\begin{aligned} \frac{S_z}{S_g} &= \frac{1}{6} (m_1 + 4m_m + m_{m2}) W \\ S_r &= S_m \left(1 + \frac{x_m^2 - y_m^2}{4M_0^2} + \frac{\Delta x^2 - \Delta y^2}{48M_0^2} + \dots \right) \quad (8) \end{aligned}$$

Для инженерно-геодезических работ даже при $S = \Delta x < 13, y = 0$, км, влияние последнего члена составляет около 1 мм. Общее влияние остальных отброшенных членов при $x = y \leq 250$ км и $S \leq 13$ км менее 1,5 мм. Поэтому во всех случаях практики инженерно-геодезических работ соотношения между длинами сторон геодезических сетей в проекциях можно выразить формулой:

$$S_r = S_m \left(1 + \frac{x_m^2 - y_m^2}{4M_0^2} \right). \quad (9)$$

Чтобы перейти от поправки в направлении в проекции Гаусса-Крюгера к соответствующей поправке стереографической проекции, воспользуемся той же формулой (7) редуцированного масштаба.

Тогда при конформном преобразовании должно быть:

$$\delta_m^r = -K_1 \frac{S}{2} - \left(\frac{dK}{dS} \right)_1 \cdot \frac{S^2}{6},$$

$$\text{где } K_1 = \frac{\partial l_n m_r^3}{\partial x_r} \sin \alpha - \frac{\partial l_n m_r^3}{\partial y_r} \cos \alpha.$$

Опуская подробности вычислений, получим:

$$\delta_m^r = -\frac{x_1 \Delta y}{4M_0^2} - \frac{y_1 \Delta x}{4M_0^2} - \frac{\Delta x \Delta y}{6M_0^2}. \quad (10)$$

Связь сближений меридианов осуществляется по формуле:

$$Y_r = Y_m'' - \frac{xy}{2M_0^2} \rho'' Y_r = Y_m'' - \frac{xy}{2M_0^2} \rho''. \quad (11)$$

Таким образом, автором установлена простая и точная математическая связь обеих проекций и систем координат.

Для математической обработки в стереографической проекции результатов геодезических измерений, редуцированных на референц-эллипсоид Ф.Н. Красовского совмещенного с международным, можно получить, используя выведенные зависимости, как для вычисления расстояний, так и направлений в следующем виде:

$$\Delta S_m = \Delta S_r + S_r^m. \quad \Delta S_m = \Delta S_r + S_r^m. \quad (12)$$

$$\delta_m = \delta_r + \delta_r^m. \quad (13)$$

Откуда, подставив известные и найденные значения правых частей (12) и (13) найдем:

$$\begin{aligned} S_r &= S_g \left(1 + \frac{x_m^2}{4M_0^2} + \frac{y_m^2}{4N_0^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta x^2}{48M_0^2} + \frac{\Delta y^2}{48N_0^2} + \dots \right). \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_r &= \rho'' \left(-\frac{x_1 \Delta y}{4M_0^2} + \frac{y_1 \Delta x}{4N_0^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \frac{l'^2 \sin^2 2B_0 x^2 \Delta y}{N_0^3} + \frac{l'^2 \sin^2 2B_0 y \Delta y}{8N_0^3} + \dots \right). \quad (15) \end{aligned}$$

По формулам (14) и (15) решается редуцированная задача проекции в обычном смысле. Причем для инженерно-геодезических сетей достаточно использовать в формулах лишь главные члены, тогда:

$$S_r = S_g \left(1 + \frac{x_m^2}{4M_0^2} + \frac{y_m^2}{4N_0^2} \right). \quad (16)$$

$$\delta_r'' = \rho'' \left(-\frac{x_1 \Delta y}{4M_0^2} + \frac{y_1 \Delta x}{4N_0^2} \right). \quad (17)$$

Анализируя формулы (16) и (17) можно отметить, что аналитически полученная проекция для инженерно-геодезических работ в среднем дает вдвое меньше искажения, чем проекция Меркатора, которыми в большинстве случаев можно пренебречь.

Учитывая в целом конформность изображения новой проекции, минимальность искажений расстояний и редукции направлений, единообразие систем координат, простую связь с проекцией Меркатора ее можно рекомендовать для инженерно-геодезических работ в СНГ.

Обратную связь можно установить по формулам:

$$x_m = x_r + \frac{x_r y_r^2}{4M_0^2} - \frac{x_r^3}{12M_0^2}; \quad (18)$$

$$y_m = y_r - \frac{x_r^2 y_r}{4M_0^2} + \frac{y_r^3}{12M_0^2}$$

$$S_m = S_r \left(1 - \frac{x_r^2 - y_r^2}{4M_0^2} \right). \quad (19)$$

$$\alpha_m = \alpha_r - \frac{x_m y_m}{2M_0^2} \rho'' - \frac{\Delta x \Delta y}{24M_0^2} \rho''. \quad (20)$$

$$Y_m = Y_r + \frac{xy}{2M_0^2} \rho''. \quad (21)$$

Размеры области применения стереографической проекции Гаусса в разработке автора можно значительно расширить, если применить в ней характер линейных искажений, выпол-

нив проектирование городских и инженерно-геодезических сетей на секущую плоскость.

Если в начале координат проекции Гаусса искажения были равны нулю, то на секущей плоскости в центральной области изображаемой территории можно создать максимально допустимые величины их со знаком минус, которые постепенно переходят в нулевые в зоне сечения, а на краях – в положительные.

Так, если пренебречь искажениями проекции порядка 1:10000, что соответствует относительной погрешности полигонометрии I разряда, то при радиусе сечения:

$$r_c = 2N_0 \sqrt{\Delta S : S} = \\ = 2N_0 \sqrt{1 : 10\,000} = 128 \text{ km}$$

Полная дуга S, внутри которой можно не учитывать данные искажения, будет равна:

$$S = r_c \sqrt{2} = 128 * 1,4 = 180 \text{ km}$$

Это означает, что на площади 100000 км² в длины сторон полигонометрии 1–2 разрядов не нужно вводить поправки за кривизну геодезических линий. Такое достоинство проекции позволит наилучшим образом решить задачу создания математической основы для обработки инженерно-геодезических сетей на плоскости.

Зададим основную характеристику функцию секущей проекции:

$$x_c = m_0 \left(x_r + \frac{x_r^3}{12M_0^2} - \frac{x_r^4 t_0 t_0^2}{8N_0^3} + \frac{x_r^5}{120N_0^4} \right)$$

Для иллюстрации этой мысли в таблице приведены значения линейных искажений се-

Расстояние от начала координат, км	Искажение в расстояниях на 1 км, м	Поправки в расстояниях на 1 км, м	Относительная погрешность
0	-0,04	+0,04	1 : 25000
10	-0,04	+0,04	1 : 25000
20	-0,04	+0,04	1 : 25000
30	-0,03	+0,03	1 : 33000
40	-0,02	+0,02	1 : 50000
50	-0,02	+0,02	1 : 50000
60	-0,02	+0,02	1 : 50000
70	-0,01	+0,01	1 : 100000
80	0,00	0,00	-
90	+0,01	-0,01	1 : 100000
100	+0,02	-0,02	1 : 50000
110	+0,03	-0,03	1 : 33000
120	+0,05	-0,05	1 : 20000

кушей проекции для инженерно-геодезических маркшейдерских работ в зависимости от их точности. Проектирование выполнено на секущую плоскость для использования осевого меридиана трехградусной зоны.

Из данных таблицы видно, что по всей ширине трехградусной зоны при обработке инженерно-геодезических и маркшейдерских сетей на секущей плоскости стереографической проекции Гаусса искажения таковы, что их не нужно учитывать не только для съемочного обоснования, но и сетей сгущения всех разрядов.

Особенно ценна данная проекция и система координат для практического использования в области изысканий, проектирования и строительства зданий, гидротехнических сооружений, подземных разработок для туннелей, т.к. отпадает необходимость перерасчета линейных и угловых измерений из-за кривизны земной поверхности. Изыскатели и проектировщики получают возможность пользоваться результатами непосредственных измерений, что крайне важно в строительстве, т.к. заведомо устраняются воз-

можные ошибки в исходных данных выносимых зданий и сооружений.

Использование этой проекции принесет ожидаемый экономический эффект, поскольку отпадает необходимость вычислений и введений в результаты измерений редукиций расстояний и углов. Безусловно, ее применение при изысканиях и проектировании послужит мощным толчком в развитии проектно-изыскательского производства в нашей стране.

Преобразование с плоскости Гаусса на плоскости секущей проекции выполняется по формуле:

$$x_c = m_0 x_r;$$

$$y_c = m_0 y_r.$$

Развернув значения x_r, y_r по (4), найдем связь координат секущей проекции с координатами ИТМ проекции Меркатора, для которой $m_0=0,9996$. Аналогичным образом можно установить связь координат секущей проекции с геодезическими координатами, полученными по GPS и ГЛОНАСС. Весь процесс невычислений координат можно выполнять с использованием компьютеров.