УДК 517.15

Салейдинов К.И.

КНУ им. Ж.Баласагына, Бишкек

ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ ДИСКРЕТНЫХ И КОНТИНУУМЕ СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО РОДА

В работе [1] рассмотрен интегральный оператор

$$\left(\mathrm{K}^{-1}\Psi\right)(t)\equiv\frac{1}{t}\left[\Psi(t)-\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\Psi(s)ds\right],\ -1\le t\le 1\quad ,\qquad (1)$$

и в работах [1, 2] определены два дискретных собственных значения $\pm\lambda_0\notin[-1;\ 1]$ и континуум собственных знаний, принимающий все значения интервала $\lambda\in(-1;\ 1)$. Соответствующие элементы дискретных и континуум собственных элементов интегрального оператора (1) определялись в виде

$$\Psi_{\pm\lambda_0}(t)=\frac{\pm\lambda_0 c}{2}\cdot\frac{1}{\pm\lambda_0-t},\quad \pm\lambda_0\notin[-1;\ 1],\qquad (2)$$

$$\Psi_{\lambda}(t)=\frac{\lambda c}{2}\mathrm{V}p\frac{1}{\lambda-t}+\mathrm{W}(\lambda)\delta(\lambda-t),\ \lambda\in(-1;\ 1),\qquad (3)$$

где

$\mathrm{V}p\dfrac{1}{\lambda-t}$ - главное значение по Коши;

δ - дельта – функция Дирака;

$$\mathrm{W}(\lambda)=1-\frac{c\lambda}{2}\mathrm{V}p\int_{-1}^{1}\frac{1}{\lambda-t}dt=1-\frac{\lambda c}{2}\ln\left|\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right|.\qquad (4)$$

Для произвольного элемента $\varphi(t)$ рассматриваемого пространства (которое будет определено ниже) решаем уравнение

$\left(\mathrm{K}^{-1}\Psi\right)(t)=\varphi(t)$.

Тогда легко найти обратный оператор к оператору K^{-1}.

$$\frac{1}{t}\left[\Psi(t)-\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\Psi(s)ds\right]=\varphi(t),\qquad (5)$$

обозначим $$\mathrm{A}=\int_{-1}^{1}\Psi(s)ds.\qquad (6)$$

Тогда

$$\Psi(t)-\frac{c}{2}\mathrm{A}=t\varphi(t)\ \text{ или }\ \Psi(t)=\frac{c}{2}\mathrm{A}+t\varphi(t).\qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6), имеем

$$\mathrm{A}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{c}{2}\mathrm{A}+s\varphi(s)\right)ds\quad\text{или}\quad \mathrm{A}(1-c)=\int_{-1}^{1}s\varphi(s)ds.$$

Отсюда $$\mathrm{A}=\frac{1}{1-c}\int_{-1}^{1}s\varphi(s)ds\quad\text{и}\quad \Psi(t)=t\varphi(t)+\frac{c}{2(1-c)}\int_{-1}^{1}s\varphi(s)ds\ .$$

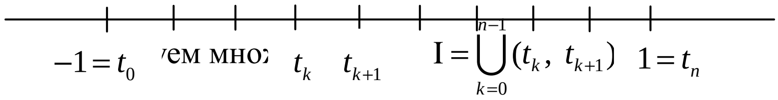
Следовательно, обратный оператор к оператору K^{-1} есть

$$(\mathrm{K}\varphi)(t)=t\varphi(t)+\frac{c}{2(1-c)}\int_{-1}^{1}t\varphi(t)dt\ .\qquad (8)$$

Построим пространство решений.

Делим интервал [-1; 1] точками

$$\{t_k : 0 \le k \le n,\ t_0 = -1,\ t_k \prec t_{k+1} \text{ и } t_n = 1\}$$



Выберем функции *u(t)*, определенные на [-1, 0)$\cup$(0, 1] так, чтобы выражение $tu(t)$ имело равномерные непрерывности на каждом из интервалов $(t_k,\ t_{k+1}),\ \ k = 0,1,...n$.

О п р е д е л е н и е. Совокупности всех функций $u(t)$, определенных на множестве I и удовлетворяющих условию

$$tu(t)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0^+} t \cdot u(t), \tag{9}$$

будем называть пространством решений и обозначений через $\mathrm{X(I)}$.

Норма в пространстве X(I) определена в виде $\|u\| = \sup\limits_{t\in I} |tu(t)|$.

Тогда пространство становится пространством Банаха. Рассмотрим отображение $\mathrm{K} : \mathrm{X(I)} \to \mathrm{X(I)}$, где оператор К имеет формулу (8).

Оператор К является ограниченным оператором в пространстве $\mathrm{X(I)}$, потому что имеет место неравенство

$$\|(\mathrm{K}u)(t)\| \le \left(1 + \left|\frac{c}{1-c}\right|\right)\|u\|.$$

Для $\forall\ u(t) \in \mathrm{X(I)}$ рассмотрим уравнение

$$(\lambda\mathrm{E} - \mathrm{K})\eta(t) = (\lambda - t)\eta(t) - \frac{c}{2(1-c)}\int_{-1}^{1} t\eta(t)dt = u(t). \tag{10}$$

Допуская $\lambda \ne t$ и умножая (10) на $\dfrac{t}{\lambda - t}$, далее проинтегрировав по переменной *t*, получим

$$W(\lambda)\int_{-1}^{1} s\eta(s)ds = (1-c)\int_{-1}^{1}\frac{su(s)}{\lambda - s}ds.$$

Отсюда, допуская $\mathrm{W}(\lambda) \ne 0$, получим

$$\int_{-1}^{1} s\eta(s)ds = \frac{1-c}{\mathrm{W}(\lambda)}\int_{-1}^{1}\frac{su(s)}{\lambda - s}ds. \tag{11}$$

(11) подставляя в (10), имеем

$$(\lambda - t)\eta(t) - \frac{c}{2(1-c)}\left[\frac{1-c}{\mathrm{W}(\lambda)}\int_{-1}^{1}\frac{su(s)}{\lambda - s}ds\right] = u(t).$$

Отсюда

$$\eta(t) = \frac{1}{\lambda - 1}\left\{u(t) - \frac{c}{2\mathrm{W}(\lambda)}\int_{-1}^{1}\frac{su(s)}{s - \lambda}ds\right\}.$$

Следовательно, из (10) определим обратный оператор

$$(\lambda E - \mathrm{K})^{-1}u(t) = \frac{1}{\lambda - t}\left\{u(t) - \frac{c}{2\mathrm{W}(\lambda)}\int_{-1}^{1}\frac{su(s)}{s - \lambda}ds\right\}. \tag{12}$$

Отсюда заключаем следующее:

1) точечный спектр, т.е. множество собственных значений оператора К, находятся из уравнения

$\mathrm{W}(\lambda) = 0$,

потому что при этом обратный оператор $(\lambda\mathrm{E} - \mathrm{K})^{-1}$ не существует;

2) непрерывный спектр оператора К состоит из множества точек [-1, 0)$\cup$ $\cup$ (0, 1], потому что на этом множестве обратный оператор $(\lambda\mathrm{E} - \mathrm{K})^{-1}$ существует, и

область определения оператора $(\lambda \mathrm{E}-\mathrm{K})^{-1}$ всюду плотна в множестве [-1; 1];

3) остаточный спектр оператора К состоит из единственной точки {0}, потому что на этом множестве обратный оператор $(\lambda \mathrm{E}-\mathrm{K})^{-1}$ существует, однако область его определения не плотна в множестве [-1; 1].

В работе [1, 2] доказано, что уравнение $\mathrm{W}(\lambda)=0$ имеет следующие корни:

а) для случая $c \prec 1$ имеются два корня $\pm\lambda_0$ на действительной оси;

б) для случая $c \succ 1$ имеются два корня $\pm\lambda_0$ на мнимой оси $(+\lambda_0 = i\beta,\ \ -\lambda_0=-i\beta)$;

в) для случая $c=1$ имеются два корня, стремящиеся $\pm\lambda_0 \ \to\ \pm\infty$.

Корни $\pm\lambda_0$ уравнения $\mathrm{W}(\lambda)=0$ являются простыми полюсами для резольвенты $\mathrm{R}_\lambda=(\lambda E-\mathrm{K})^{-1}$, где $\lambda \notin \{\pm\lambda_0\}\cup[-1;\ 1]$, потому что

$$\lim_{t\to\lambda}\mathrm{R}_\lambda=\lim_{t\to\lambda}(\lambda E-\mathrm{K})^{-1}u(t)=\infty .$$

Поэтому для резольвенты оператора К мы можем применять теорию аналитических функций [3, 5].

Пусть $\Gamma_+,\ \Gamma_-,\ \Gamma$ являются простыми замкнутыми кривыми, внутри которых содержится, соответственно, $+\lambda_0$, $-\lambda_0$ и интервал [-1; 1]. Тогда для функций, являющихся аналитическими в областях, ограниченных кусочно-гладкими границами $\Gamma_+,\ \Gamma_-,\ \Gamma$, имеет место интегральная формула Коши

$$u(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_+}(\lambda E-\mathrm{K})^{-1}u(t)d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_-}(\lambda \mathrm{E}-\mathrm{K})^{-1}u(t)d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}(\lambda E-\mathrm{K})^{-1}u(t)d\lambda . \qquad (13)$$

Здесь первый и второй интегралы могут быть вычислены с помощью вычета [5]. Исходя из (12), для первого интеграла в (13) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_+}(\lambda E-\mathrm{K})^{-1}u(t)d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\left\{\oint_{\Gamma_+}\frac{u(t)}{\lambda-t}d\lambda-\oint_{\Gamma_+}\frac{\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\frac{su(s)}{\lambda-s}ds}{(\lambda-t)w(\lambda)}d\lambda\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_+}\frac{\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\frac{su(s)}{\lambda-s}ds}{(\lambda-t)w(\lambda)}d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\left\{2\pi i\,\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\frac{\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\frac{su(s)ds}{\lambda-s}ds}{(\lambda-t)w(\lambda)}\right\}=$$

$$=-\frac{\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\frac{su(s)ds}{\lambda_0-s}ds}{\left[(\lambda-t)\,w(\lambda)\right]'_{\lambda=\lambda_0}}=-\frac{\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\frac{su(s)ds}{\lambda_0-s}ds}{w(\lambda_0)+(\lambda_0-t)w'(\lambda_0)}=-\frac{\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\frac{su(s)ds}{\lambda_0-s}ds}{(\lambda_0-t)w'(\lambda_0)}= \qquad (14)$$

$$=\frac{1}{\lambda_0-t}\frac{1}{2}c\left(\frac{2}{c\lambda_0^2}\int_{-1}^{1}s\Psi_{\lambda_0}^2(s)ds\right)^{-1}\cdot\int_{-1}^{1}\frac{su(s)}{\lambda_0-s}ds=\Psi_{\lambda_0}(t)\frac{\int_{-1}^{1}s\Psi_{\lambda_0}(s)u(s)ds}{\int_{-1}^{1}s\Psi_{\lambda_0}^2(s)ds}\equiv$$

$$\equiv \mathrm{A}(\lambda_0)\Psi_{\lambda_0}(t).$$

Здесь мы воспользовались обозначениями

$$\Psi_{\lambda_0}(t)=\frac{\lambda_0}{2}\cdot\frac{1}{\lambda_0-t}, \qquad (15)$$

$$w'(\lambda_0)=\frac{2}{c\lambda_0^2}\int_{-1}^{1}s\Psi_{\lambda_0}^2(s)ds, \qquad (16)$$

$$\mathrm{A}(\lambda_0)=\frac{\int_{-1}^{1}s\Psi_{\lambda_0}(s)u(s)ds}{\int_{-1}^{1}s\Psi_{\lambda_0}^2(s)ds}\,. \tag{17}$$

Аналогично получим формулы для второго интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_-}(\lambda E-\mathrm{K})^{-1}u(\lambda)d\lambda=\mathrm{A}(-\lambda_0)\Psi_{-\lambda_0}(t), \tag{18}$$

где

$$\Psi_{-\lambda_0}(t)=\frac{-\lambda_0}{2}\cdot\frac{1}{-\lambda_0-t}=\frac{\lambda_0}{2}\frac{1}{\lambda_0+t}, \tag{19}$$

$$w'(-\lambda_0)=\frac{2}{c(-\lambda_0)^2}\int_{-1}^{1}s\Psi_{-\lambda_0}^2(s)ds, \tag{20}$$

$$\mathrm{A}(-\lambda_0)=\frac{\int_{-1}^{1}s\Psi_{-\lambda_0}(s)u(s)ds}{\int_{-1}^{1}s\Psi_{-\lambda_0}^2(s)ds}. \tag{21}$$

Для вычисления третьего интеграла в (13) введем следующее условие. Функция $tu(t)$ удовлетворяет условие Гёльдера на каждом из интервалов $(t_k,\ t_{k+1})$: $\left|t'u(t')-t''u(t'')\right|\le L\left|t'-t''\right|,\ \ L-const,\ \ t',\ t''\in(t_k,\ t_{k+1})$.

Такое условие будем обозначать через H_1. Вычислим третий интеграл в (13)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}(\lambda E-\mathrm{K})^{-1}u(t)d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{1}{\lambda-t}u(t)d\lambda-\frac{c}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{1}{\lambda-t}\left(\frac{1}{w(\lambda)}\int_{-1}^{1}\frac{su(s)}{s-\lambda}ds\right)d\lambda=$$
$$=u(t)-\frac{c}{2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{M(\lambda)}{\lambda-t}d\lambda. \tag{22}$$

Здесь

$$M(\lambda)=\frac{1}{w(\lambda)}\int_{-1}^{1}\frac{su(s)}{s-\lambda}ds. \tag{22^1}$$

Исходя из условий H_1 на каждом замкнутом интервале, из [-1; 1], не содержащей точек t_k, имеем (см. [3], ст. 50, 51, 53 Лемма)

$$\lim_{\lambda\to t\pm i0}M(\lambda)=M^{\pm}(t),$$

где

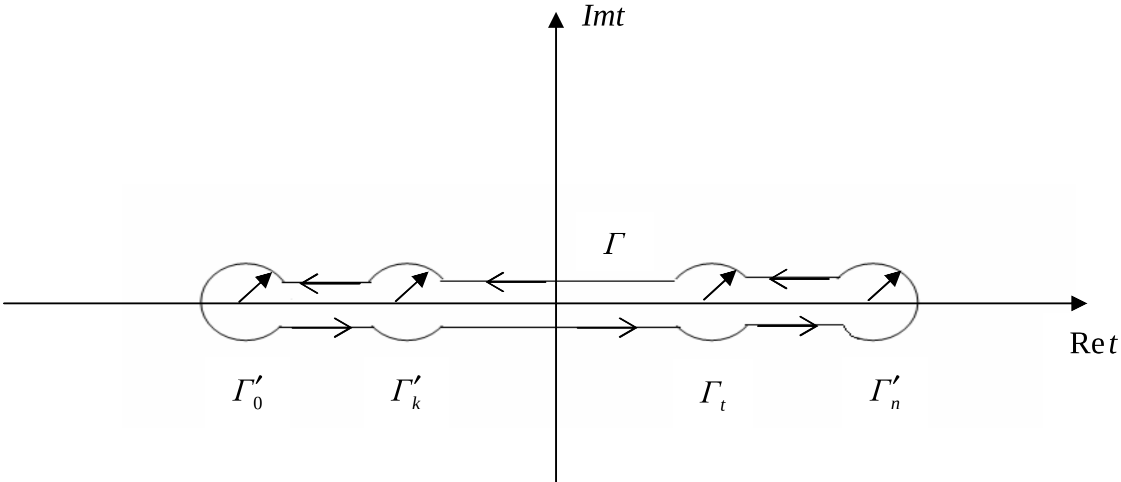
$$M^{\pm}(t)=\frac{1}{W^{\pm}(t)}\int_{-1}^{1}\frac{su(s)}{s-t\pm io}ds\,, \tag{23}$$

$$w^{\pm}(t)=w(t\pm io)\,.$$

Замкнутую кривую Γ мы можем разложить в виде

$$\Gamma=\bigcup_{k=0}^{n}\Gamma'_k\cup\Gamma_t\cup\Gamma',$$

где Γ'_k - окружности радиуса ε_k с центром в точке t_k, $k=0,\ 1,\ 2,\ldots n$, Γ_t - окружности радиуса ε с центром в точке t и Γ' - состоит из линии отрезков, соединяющей концы окружностей, как показано на рисунке



Исходя из равномерных непрерывностей функций $tu(t)$ на каждом из интервалов $(t_k,\ t_{k+1}),\ k=0,\ 1,\ 2,...n,$ вокруг точки $\lambda=t_k$ по меньшей мере мы имеем

$$M(\lambda)=0\left(\left|\ln(\lambda-t_k)\right|\right),\ \lambda\to t_k.$$

Следовательно, интегралы по кривой Γ_k' имеют оценки

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k'}\frac{M(\lambda)}{\lambda-t}d\lambda=0\left(\varepsilon_k\left|\ln\varepsilon_k\right|\right),\ \varepsilon_k\to 0,$$

а интеграл по кривой Γ_t имеет оценки

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_t}\frac{M(\lambda)}{\lambda-t}d\lambda=\frac{1}{2}\left[M^+(t)+M^-(t)\right]+0(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0.$$

Учитывая эти оценки для интеграла по кривой Γ при $\varepsilon_k\to o,\ \varepsilon\to 0$, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{M(\lambda)}{\lambda-t}d\lambda=\frac{1}{2}\left[M^+(t)+M^-(t)\right]+\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{M^-(\lambda)-M^+(\lambda)}{\lambda-t}d\lambda, \tag{24}$$

где интегралы понимаются как главное значение по Коши.

Умножая (22) на $w(\lambda)$ и применяя формулу Племеля [5], получим

$$M^\pm(t)w^\pm(t)=\int_{-1}^{1}\frac{su(s)}{s-t}ds\pm\pi itu(t).$$

Отсюда, отнимая друг от друга, имеем

$$u(t)=\frac{1}{2\pi it}\left[M^+(t)w^+(t)-M^-(t)w^-(t)\right]. \tag{25}$$

Для функций $w^\pm(t)$ имеет место равенство (см. [3])

$$w^\pm(t)=w(t)\pm\frac{1}{2}\pi ict\,. \tag{26}$$

Подставляя (26) в (25) и группируя, мы получим

$$u(t)-\frac{1}{4}c\left[M^+(t)+M^-(t)\right]=\frac{w(t)}{2\pi it}\left[M^+(t)-M^-(t)\right], \tag{27}$$

где
$$w(t)=\frac{1}{2}\left[w^+(t)+w^-(t)\right].$$

Подставляя (24) в (22) и учитывая (27), мы получим

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}(\lambda E-\mathrm{K})^{-1}u(t)d\lambda=w(t)\frac{M^+(t)-M^-(t)}{2\pi it}+\frac{1}{2}c\int_{-1}^{1}\frac{\lambda}{\lambda-t}\frac{M^+(\lambda)-M^-(\lambda)}{2\pi i\lambda}d\lambda=$$

$$=\int_{-1}^{1}w(\lambda)\frac{M^+(\lambda)-M^-(\lambda)}{2\pi i\lambda}\delta(\lambda-t)d\lambda+\int_{-1}^{1}\frac{c\lambda}{2}\cdot\frac{1}{\lambda-t}\frac{M^+(\lambda)-M^-(\lambda)}{2\pi i\lambda}d\lambda= \tag{28}$$

$$=\int_{-1}^{1}\Psi_\lambda(t)\frac{M^+(\lambda)-M^-(\lambda)}{2\pi i\lambda}d\lambda=\int_{-1}^{1}A(\lambda)\Psi_\lambda(t)d\lambda,$$

где
$$\Psi_\lambda(t)=\frac{c\lambda}{2}\ \frac{1}{\lambda-t}+w(\lambda)\delta(\lambda-t), \tag{29}$$

$$\mathrm{A}(\lambda)=\frac{M^+(\lambda)-M^-(\lambda)}{2\pi i\lambda}.$$

Воспользуясь формулами $(22)^1$ и (26) для значений $\lambda\neq t_k$, имеем

$$\mathrm{A}(\lambda)=\frac{M^{+}(\lambda)-M^{-}(\lambda)}{2\pi i\lambda}=\frac{1}{w^{+}(\lambda)w^{-}(\lambda)}\left\{w(\lambda)u(\lambda)+\frac{1}{2}c\int_{-1}^{1}\frac{su(s)}{\lambda-s}ds\right\}= \tag{30}$$
$$=\frac{1}{N(\lambda)}\int_{-1}^{1}su(s)\Psi_{\lambda}(s)ds,$$
где $$N(\lambda)=\lambda w^{+}(\lambda)w^{-}(\lambda).$$

Учитывая (14), (18) и (28) из (13), мы получим
$$u(t)=\mathrm{A}(\lambda_0)\Psi_{\lambda_0}(t)+\mathrm{A}(-\lambda_0)\Psi_{-\lambda_0}(t)+\int_{-1}^{1}\mathrm{A}(\lambda)\Psi_{\lambda}(t)d\lambda. \tag{31}$$

Здесь $\Psi_{\lambda_0}(t)$, $\Psi_{\lambda_0}(t)$ и $\Psi_{\lambda}(t)$ - дискретные и континуум собственных функций оператора K^{-1}, определенные по формулам (15), (19) и (29). Коэффициенты $\mathrm{A}(\lambda_0)$, $\mathrm{A}(-\lambda_0)$ и $\mathrm{A}(\lambda)$ определены по формулам (17), (21) и (30). Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Т е о р е м а. Пусть $c \succ 0$ и элементы пространства $\mathrm{X}(I)$ удовлетворяют условию H_1. Тогда дискретные собственные элементы $\Psi_{\lambda_0}(t)$, $\Psi_{-\lambda_0}(t)$ и континуум собственных элементов $\Psi_{\lambda}(t)$ оператора K^{-1} полны на интервале [-1; 1], т.е. для $\forall\, u(t)\in \mathrm{X}(I)$, удовлетворяющей условию H_1, и для значений $t\neq t_k$, $k=1, 2, ...n$, имеет место разложение (31), коэффициенты которого определяются единственным образом по формулам (17), (21) и (30).

Литература:

1. Салейдинов К.И. О дискретном спектре одного интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода. // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Выпуск 37. -Бишкек: Илим, 2007, с. 70-74.
2. Салейдинов К.И. О континуум–спектре одного интегрального уравнения типа Фредгольма третьего рода. //Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Выпуск 37. -Бишкек: Илим, 2007, С. 75–79.
3. Мусхлешвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – С. 3 – 511.
4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. –М.: Наука, 1979. –С. 3 – 279.
5. Титчмарш Е. Теория функций. – М.: Наука, 1980. – С. 3-464.
6. Хатсон В., Пим Дж.С. Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1980. – С. 3–432.
7. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. – М.: Мир, 1979. - С. 3–493.