УДК 517.977.1/.5 (575.2) (04)

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ УПРАВЛЯЮЩЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Л.Г. Лелевкина – канд. физ.-мат. наук, доц.
Н.В. Сатина – соискатель

The solution of a problem of thermal conductivity for a system with distributed parameters is given in the article. It was shown that quadratic criterion of quality is of a special form including three functional ones. Controlling action in boundary conditions allows control a process of heat exchange. The numerical solutions of the problem as well as graphs of temperature distribution and control actions are shown.

Рассмотрена задача оптимизации процесса теплопроводности при управляющем воздействии в граничных условиях, позволяющем управлять процессом теплообмена с окружающей средой. В отличие от работ [1], [2] квадратичный критерий качества содержит не только функционал энергии, но и функционалы, определяющие квадраты отклонения полученных распределений температур от заданных функций в течение всего процесса нагрева и в конечный момент времени. Применение метода динамического программирования Беллмана к решению задач оптимизации такого типа приводит к сложным уравнениям типа Риккати, численная реализация которых проведена только для эквивалентной задачи в цилиндрической системе координат [3]. В данной работе используется принцип максимума Понтрягина для систем с распределенными параметрами [1]. Получена сопряженная система, необходимые условия оптимальности и структура оптимального управляющего воздействия. Произведена разработка численного алгоритма решения модельной задачи процесса теплопроводности с использованием разностной схемы с весами [4].

Решение задачи оптимизации принципом максимума Понтрягина

1. Необходимые условия оптимальности, структура оптимального управления

Рассмотрим процесс теплопроводности, описываемый уравнением [1]

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x) \quad , \quad 0 < t \le T \ , \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями [2]

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u(t,1)}{\partial x} = h\left[T_R + p(t) - u(t,1)\right] \tag{3}$$

Здесь $u(t,x)$ – распределение температуры в момент времени $t \in (0,T)$ в точке x, a – коэффициент диффузии, T_R – температура внешней среды, h – коэффициент теплообмена, $p(t)$ – управляющий параметр, входящий в граничные условия, $f(x,t)$ – плотность внутренних источников тепла, $u_0(x)$ – распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$.

Решением рассматриваемой здесь задачи оптимального управления будем называть пару функций $\{u(t,x), p(t)\}$, удовлетворяющих уравнениям (1)–(3) и доставляющих минимум следующему функционалу [3]

$$I = \gamma_1 \int_0^T \int_0^1 [u(t,x) - g(t,x)]^2 dxdt + \gamma_2 \int_0^1 [u(T,x) - \varphi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T p^2(t) dt, \\ \gamma_1, \gamma_2, \beta = const > 0 \tag{4}$$

Здесь T – фиксированный момент времени, $\varphi(x)$, $g(t,x)$ – заданные функции из L_2 (0,1) и L_2 (0,1)×(0,T).

Непосредственными вычислениями находим, что при этом функционал $I[p,\beta,\gamma_1,\gamma_2]$ получает приращение согласно методике [1]

$$I(p+\Delta p) - I(p) = \gamma_1 \int_0^T \int_0^1 \Delta u^2(t,x) dxdt + 2\gamma_1 \int_0^T \int_0^1 \Delta u(t,x)[u(t,x) - g(t,x)] dxdt + \\ + 2\gamma_2 \int_0^1 [u(T,x) - \varphi(x)] \Delta u(T,x) dx + 2\beta \int_0^T p(t) \Delta p(t) dt + \\ + \gamma_2 \int_0^1 [\Delta u(T,x)]^2 dx + \beta \int_0^T [\Delta p(t)]^2 dt \tag{5}$$

Задача (1)–(3) в приращениях будет иметь вид:

$$\frac{\partial \Delta u(t,x)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \Delta u(t,x)}{\partial x^2} \tag{6}$$

$$\Delta u(0,x) = 0$$

$$\frac{\partial \Delta u(t,0)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Delta u(t,1)}{\partial x} = h[\Delta p(t) - \Delta u(t,1)]$$

Введем сопряженную систему

$$\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} + a \frac{\partial^2 \psi(t,x)}{\partial x^2} - 2\gamma_1 [u(t,x) - g(t,x)] = 0 \quad , \quad 0 \le t < T \, , \quad 0 < x < 1 \tag{7}$$

$$\psi(T,x) = -2\gamma_2 [u(T,x) - \varphi(x)] \tag{8}$$

$$\frac{\partial \psi(t,0)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \psi(t,1)}{\partial x} + h\psi(t,1) = 0 \tag{9}$$

Таким образом, сопряженная задача содержит решение исходной задачи (1)–(3).

Умножая уравнение (6) на достаточно гладкую функцию $\psi(t,x) \in W_2^{0,1}(Q)$, получим

$$\int_0^T\int_0^1 \psi(t,x)\left[\frac{\partial \Delta u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial x^2}\right]dxdt = -ah\int_0^T \psi(t,1)[\,\Delta p(t) - \Delta u(t,1)]\,dt + \\ + \int_0^T\int_0^1\left(\frac{\partial \Delta u}{\partial t}\psi(t,x) + a\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta u}{\partial x}\right)dxdt = 0 \qquad (10)$$

Обобщенное решение сопряженной задачи (7)–(9) имеет вид:

$$2\gamma_2\int_0^1[u(T,x)-\varphi(x)]\Phi(T,x)dx + \int_0^T\int_0^1\left[\psi\frac{\partial \Phi}{\partial t} + a\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2\gamma_1[\,u(t,x) - g(t,x)]\,\Phi(t,x)\right]dxdt + \\ + ah\int_0^T \psi(t,1)\Phi(t,1)dt = 0 \qquad (11)$$

для любой функции $\Phi \in W_2^{1,1}(Q)$, обращающейся в нуль при $t = 0$.

Из (10) и (11), полагая $\Phi = \Delta u$, получаем

$$2\gamma_2\int_0^1[u(T,x)-\varphi(x)]\Delta u(T,x)dx + ah\int_0^T \Delta p(t)\psi(t,1)dt + 2\gamma_1\int_0^1\int_0^1[u(t,x)-g(t,x)]\Delta u(t,x)dxdt = 0 \qquad (12)$$

С учетом (12) приращение функционала ΔI имеет вид

$$\Delta I = \gamma_1\int_0^T\int_0^1 \Delta u^2(t,x)dxdt - ah\int_0^T \Delta p(t)\psi(t,1)dt + 2\beta\int_0^T \Delta p(t)p(t)dt + \gamma_2\int_0^1[\Delta u(T,x)]^2dx + \beta\int_0^T[\Delta p(t)]^2dt \qquad (13)$$

Для того чтобы

$$\Delta I = \gamma_1\int_0^T\int_0^1 \Delta u^2(t,x)dxdt - \int_0^T \Delta p(t)[ah\,\psi(t,1) - 2\beta p(t)]dt + \\ + \gamma_2\int_0^1[\Delta u(T,x)]^2dx + \beta\int_0^T[\Delta p(t)]^2dt \ge 0$$

необходимо выполнение следующего неравенства:

$$-\int_0^T \Delta p(t)[\,ah\,\psi(t,1) - 2\beta p(t)]\,dt \le 0\,, \qquad (14)$$

так как интегралы в правой части (13), содержащие квадраты приращений решения и управления неотрицательны.

Вводя функцию Понтрягина, неравенство (14) можно представить в виде:

$$\int_0^T\left[H\left(\psi^0,u^0,p\right) - H\left(\psi^0,u^0,p^0\right)\right]dt \le 0 \qquad (15)$$

для всех допустимых управлений. Неравенство (15) эквивалентно следующему равенству:

$$H\left(\psi^0,u^0,p^0\right)(=)\max_p H\left(\psi^0,u^0,p\right), \qquad (16)$$

где

$$H(\psi^0,u^0,p) = ah\psi(t,1)p(t) - \beta p^2(t)$$

Отсюда следует, что оптимальное управление имеет вид:

$$p(t)=\frac{ah\psi^{0}(t,1)}{2\beta}\,. \tag{17}$$

Таким образом, полученное управление (17) доставляет минимум функционалу (4) и является решением задач

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}=a\dfrac{\partial^{2}u(t,x)}{\partial x^{2}}+f(t,x)\quad, \quad 0<t\le T\,,\quad 0<x<1\\ u(0,x)=u_0(x)\\ \dfrac{\partial u(t,0)}{\partial x}=0\quad,\quad \dfrac{\partial u(t,1)}{\partial x}=h\left[T_R+p(t)-u(t,1)\right] \end{cases} \tag{18}$$

и

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi(t,x)}{\partial t}+a\dfrac{\partial^{2}\psi(t,x)}{\partial x^{2}}-2\gamma_1[u(t,x)-g(t,x)]=0\quad, \quad 0\le t<T\,,\quad 0<x<1\\ \psi(T,x)=-2\gamma_2\left[\varphi(x)-u(T,x)\right]\\ \dfrac{\partial \psi(t,0)}{\partial x}=0\quad,\quad \dfrac{\partial \psi(t,1)}{\partial x}+h\psi(t,1)=0 \end{cases} \tag{19}$$

2. Численное решение модельной задачи

Решение задачи (18), (19) проводится с использованием разностной схемы с весами [4] путем сведения задачи к итерационному процессу (k – итерационный параметр):

Для задачи (18) итерационный процесс имеет вид:

$$p^{(0)}(x)\equiv 0\quad,\quad 0\le x\le 1\quad,\quad 0\le t\le T\quad,\quad k=0,1,\ldots$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^{(k)}(t,x)}{\partial t}=a\dfrac{\partial^{2}u^{(k)}(t,x)}{\partial x^{2}}+f(t,x)\\ u^{(k)}(0,x)=u_0(x)\\ \dfrac{\partial u^{(k)}(t,0)}{\partial x}=0\quad,\quad \dfrac{\partial u^{(k)}(t,1)}{\partial x}=h\left[T_R+p^{(k)}(t)-u^{(k)}(t,1)\right] \end{cases} \tag{20}$$

Тогда соответствующая схема решения задачи (20) принимает вид:
n = 1,2,…,M

$$\begin{cases} -\dfrac{1+\Theta}{2}ku_{i-1}^{n}+\left[1+(1+\Theta)k\right]u_i^{n}-\dfrac{1+\Theta}{2}ku_{i+1}^{n}=\\ =\dfrac{1-\Theta}{2}ku_{i-1}^{n-1}+\left[1-(1-\Theta)k\right]u_i^{n-1}+\dfrac{1-\Theta}{2}ku_{i+1}^{n-1}+\\ +\dfrac{1+\Theta}{2}\tau f_i^{n}+\dfrac{1-\Theta}{2}\tau f_i^{n-1}\quad,\qquad i=2,\ldots,N-1\\ u_i^{0}=u_0(x_i)\quad,\qquad i=1,\ldots,N\\ \dfrac{u_2^{n}-u_1^{n}}{h_1}=0\\ \dfrac{u_N^{n}-u_{N-1}^{n}}{h_1}=h\left[T_R+p^{n}-u_N^{n}\right], \end{cases} \tag{21}$$

где $k = \dfrac{a\tau}{h_1^2}$ – число Куранта; $\Theta \in [-1,1]$ – параметр схемы.

Для сопряженной задачи (19) итерационный процесс имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi^{(k+1)}}{\partial t} + a\dfrac{\partial^2 \psi^{(k+1)}}{\partial x^2} - 2\gamma_1 [u^{(k)}(t,x) - g(t,x)] = 0 \\ \psi^{(k+1)}(T,x) = 2\gamma_2 \left[\varphi(x) - u^{(k)}(T,x)\right] \\ \dfrac{\partial \psi^{(k+1)}(t,0)}{\partial x} = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial \psi^{(k+1)}(t,1)}{\partial x} + h\psi^{(k+1)}(t,1) = 0 \end{cases} \tag{22}$$

И соответствующая схема решения сопряженной задачи (22) представляется в виде: $n = M, M-1, M-2, \ldots, 1$.

$$\begin{cases} -\dfrac{1-\Theta}{2} k\psi_{i-1}^{n-1} + \left[1 + (1-\Theta)k\right]\psi_i^{n-1} - \dfrac{1-\Theta}{2} k\psi_{i+1}^{n-1} = \\ = \dfrac{1+\Theta}{2} k\psi_{i-1}^{n} + \left[1 - (1+\Theta)k\right]\psi_i^{n} + \dfrac{1+\Theta}{2} k\psi_{i+1}^{n} + \\ + \gamma_1 (1+\Theta)\tau [u_i^n - g_i^n] - \gamma_1 (1-\Theta)\tau [u_i^{n-1} - g_i^{n-1}] \quad , \qquad i = 2, \ldots, N-1 \\ \psi_i^n = -2\gamma_2 [u(T,x) - \varphi(x)] \quad , \qquad i = 1, \ldots, N \\ \dfrac{\psi_2^n - \psi_1^n}{h} = 0 \\ \dfrac{u_N^n - u_{N-1}^n}{h} + \psi_N^n h1 = 0 \end{cases} \tag{23}$$

Для управления $p(t)$ имеем следующий итерационный процесс:

$$p^{(n)}(t) = \frac{ah}{2\beta}\psi_N^n . \tag{24}$$

На каждом временном слое tn системы уравнений (21),(23) решаются последовательно методом прогонки, причем система (21) решается в прямом направлении, т.е. начиная с момента времени $t_1 = 0$, а система (23) в обратном, начиная с момента времени $t_M = T$.

Представим результаты численных экспериментов с использованием итерационного алгоритма (20), (22) и (24). С этой целью решим модельную задачу с известным точным решением.

Полагаем в (18) $f(t,x) \equiv 0$, $T_R = 0$,

$$u(0,x) = cos(2\pi l x) . \tag{25}$$

В качестве функций φ(x) и g(t,x) в функционале (4) выбираются следующие функции:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\gamma_2} cos(\rho x) exp(-a\mu^2 T) + cos(\mu x) exp(-a\mu^2 T) \tag{26}$$

$$g(t,x) = \frac{1}{2\gamma_2} cos(\rho x) exp(-a\mu^2 t) + cos(\mu x) exp(-a\mu^2 t) , \tag{27}$$

где $\quad \mu = 2\pi l, \quad \rho = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad h = \rho tg\rho, \quad \gamma_1 = a(\rho^2 + \mu^2)\gamma_2 .$

Точные решения задач (18), (19) и (17) запишутся в следующем виде:

$$u(t,x) = cos(\mu x) exp(-a\mu^2 t) , \tag{28}$$

$$\psi(t,x) = cos(\rho x) exp(-a\mu^2 t), \qquad (29)$$

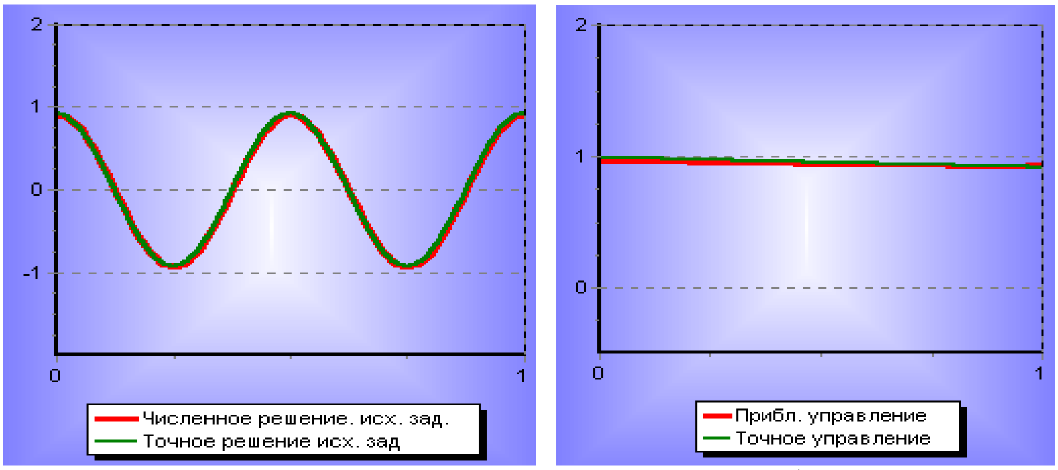
$$p(t) = \frac{ah1}{2\beta} cos(\rho) exp(-a\mu^2 t). \qquad (30)$$

Проанализируем, как ведет себя тестовая задача, варьируя параметры задачи.

Таблица 1

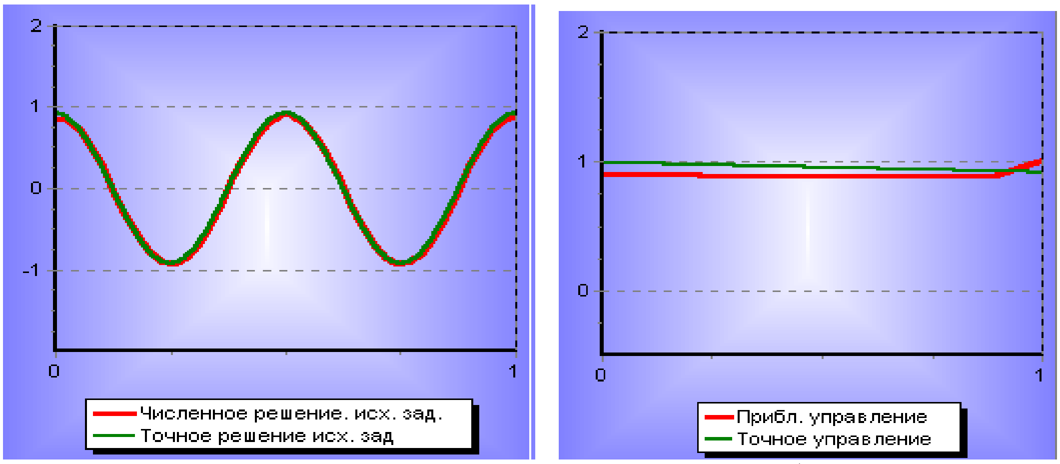
Зависимость относительных ошибок функций u^m, p^m от числа узлов

Параметр			Число		Кол-во итераций	Отн. ошибка		Оценка сход. ит. проц.
K	*l*	*a*	узлов	врем. слоев		u	p	
3	2	0.0005	100	100	8	2.4721	2. 4827	0.00003
3	2	0.0005	40	10	61	7.9294	9.8608	0.00009



а б

Рис. 1: а – решение u(t,x), б – управление p(t) при различных параметрах, приведенных в табл. 1 (число узлов =100, число временных слоев =100).



а б

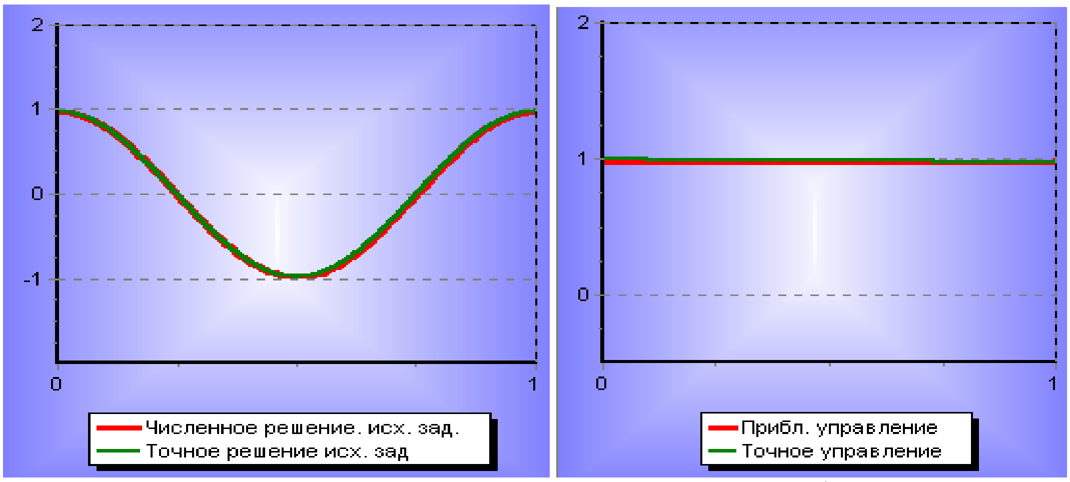
Рис. 2: а – решение u(t,x); б – управление p(t) при различных параметрах, приведенных в табл.1 (число узлов = 40, число временных слоев = 10).

Из табл. 1 и рис. 1, 2 можно сделать вывод, что с увеличением числа узлов сетки и временных слоев относительная ошибка u^m и p^m уменьшаются, а скорость сходимости итерационного процесса увеличивается.

Таблица 2

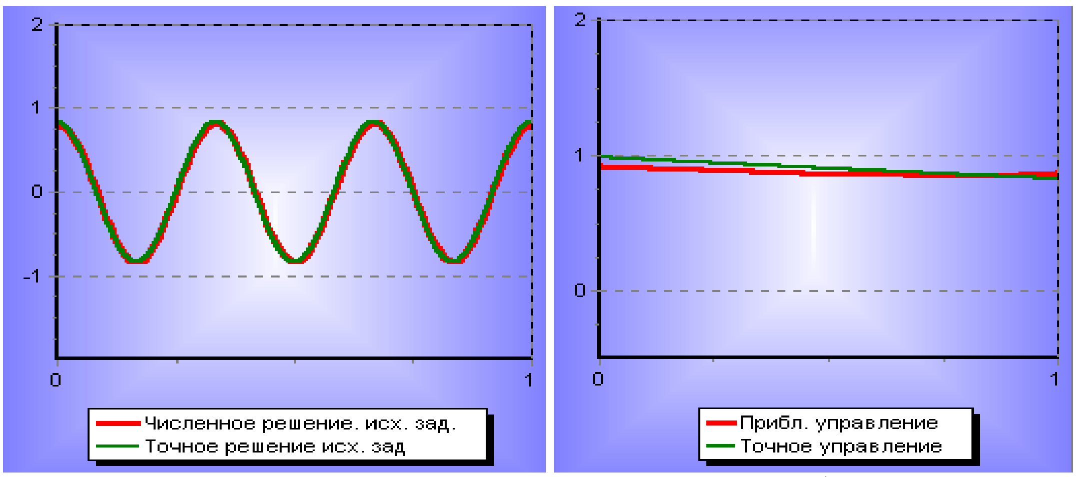
Зависимость относительных ошибок функций u^m, p^m
от параметров k и l тестовой задачи

Параметр			Число		Кол-во итераций	Отн. ошибка		Оценка сход. ит. проц.
K	l	a	узлов	врем. слоев		u	p	
2	1	0.0005	100	10	8	0,59346	1,57790	0.00005
5	3	0.0005	100	10	36	5,63556	5,71464	0.00009



а б

Рис. 3: а – решение u(t,x); б – управление p(t) при различных параметрах, приведенных в табл. 2 (число узлов =100, число временных слоев =100).



а б

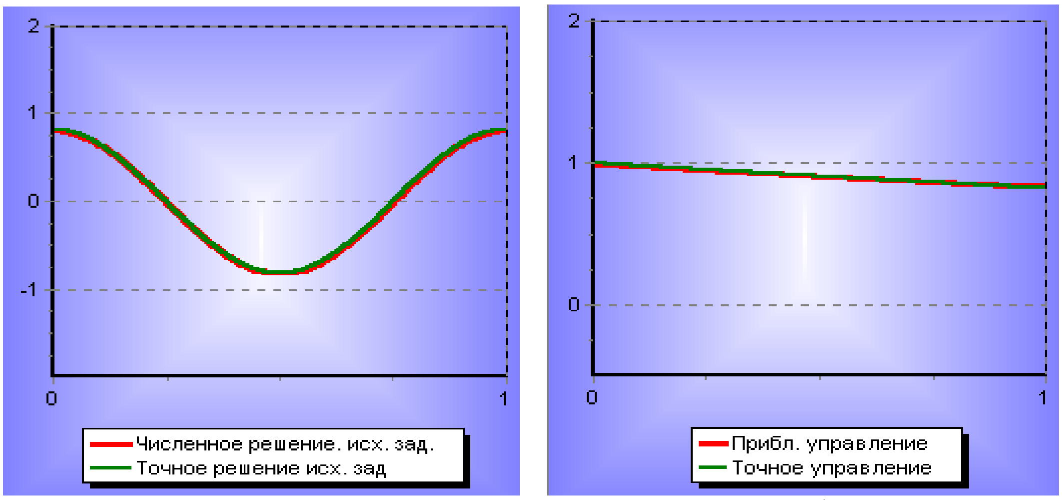
Рис. 4: а – решение u(t,x); б – управление p(t) при различных параметрах, приведенных в табл. 2 (число узлов = 40, число временных слоев=10).

Из табл. 2 и рис. 3, 4 видно, что с увеличением значений параметров k и *l* относительная ошибка u^m и p^m увеличивается, а скорость сходимости итерационного процесса уменьшается. Это связано с увеличением гармоник ряда Фурье, т.е. чем их больше, тем сложней вид решения и тем ошибка численного решения больше.

Таблица 3

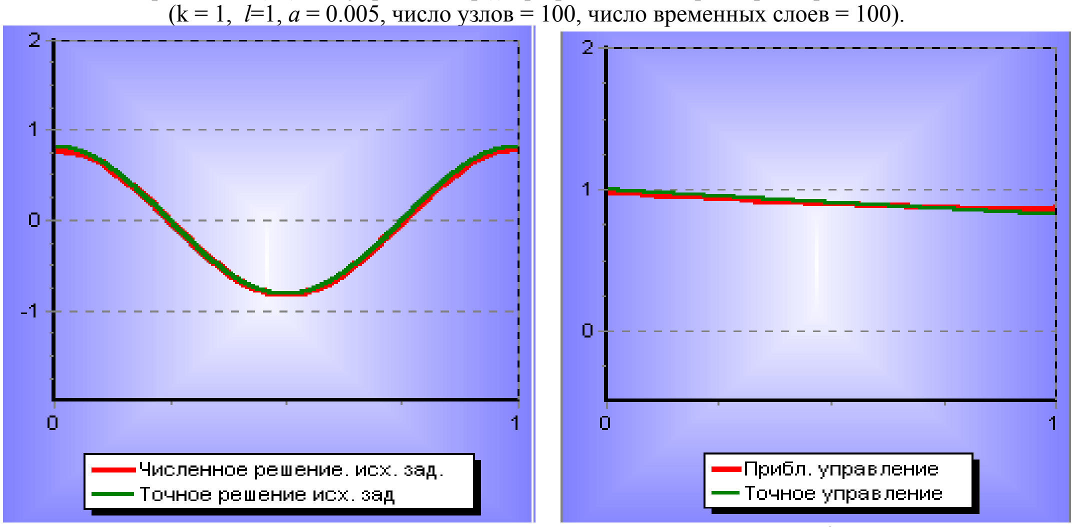
Зависимости относительных ошибок функций u^m, p^m от параметра *a*

Параметр			Число		Кол-во итераций	Отн. ошибка		Оценка сход. ит. проц.
K	*l*	*a*	узлов	врем. слоев		u	p	
3	2	0.0005	100	100	8	2. 4721	2. 4827	0.00003
3	2	0.005	100	100	5	253,491	322.604	6.25065
1	1	0.005	100	100	10	1,77973	1,47122	0.00003
1	1	0.005	40	10	15	4,8324	5,9039	0.00009



а б

Рис. 5: а – решение u(t,x); б – управление p(t) при различных параметрах, приведенных в табл. 3 (k = 1, *l*=1, *a* = 0.005, число узлов = 100, число временных слоев = 100).



а б

Рис. 6: а – решение u(t,x); б – управление p(t) при различных параметрах, приведенных в табл. 3 (k = 1, *l*=1, *a* = 0.005, число узлов = 40, число временных слоев = 10).

Из табл. 3 видно, что итерационный процесс при увеличении параметра *a* и при достаточно больших значениях параметров k, *l* расходится. И при большом числе итераций относительные ошибки u^m, p^m достаточно велики. Однако при k=1, *l*=1 и при увеличении параметра *a* итерационный процесс сходится и относительные ошибки малы. Это также можно наблюдать и на рис. 5. И даже если уменьшить количество временных слоев и число узлов сетки, итерационный процесс будет сходиться, только за большее число итераций (рис. 6).

Таким образом, многочисленные эксперименты показали быструю сходимость итерационного процесса (20), (22) и (24) при малых значениях параметров $k<2$, $l<1$ и $a<0.005$

Литература

1. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978.
1. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. – М: Наука, 1981.
2. *Лелевкина Л.Г., Самохвалова Т.П., Шемякина Т.А.* Метод Беллмана в задачах синтеза оптимального управления индукционным нагревом металлов // Вестник КРСУ. – 2001. – Т. 1. – № 2. – С. 54–62.
3. *Скляр С.Н., Алтынникова Л.В.* Разностные схемы для решения нестационарных задач диффузионно-конвективного переноса. – Бишкек: Илим, 2001.