

УДК 6.5.1.22 (575.2) (04)

## О КОЛИЧЕСТВЕННЫХ МЕТОДАХ И НЕ ТОЛЬКО О НИХ

*С.К. Кыдыралиев* – канд. физ.-мат. наук, доц.

*А.Б. Урдалетова* – канд. физ.-мат. наук

---

The place of quantitative methods in practical activity of the economists is considered in this article.

Количественные методы представляют собой математические методы. Но, к сожалению, слово математика в настоящее время несколько дискредитировано и воспринимается как нечто практически бесполезное, призванное максимально усложнить жизнь.

Математика, без примеров, без разбора экономических ситуаций, в которых она может быть применена, экономистам и бизнесменам действительно не нужна.

Предлагаем цитату из письма выдающегося физика-теоретика (!!!) Л.Д. Ландау по поводу программы по математике для физиков. “К сожалению, Ваши программы страдают теми же недостатками, какими обычно страдают программы по математике, превращающие изучение математики физиками наполовину в утомительную трату времени. При всей важности математики для физиков физики, как известно, нуждаются в считающей аналитической математике; математики же, по непонятной мне причине, подсовывают нам в качестве принудительного ассортимента логические упражнения ... Мне кажется, что давно пора обучать физиков тому, что они считают нужным для себя, а не спасать их души вопреки их собственному желанию ... Таким образом я считаю, что преподавание математики нуждается в серьезнейшей реформе”.

Нам кажется, что это утверждение останется столь же справедливым, если в нем поменять слово физик на слово экономист.

Так, какая математика нужна экономистам? – Такая, которая бы обеспечивала экономистов, бухгалтеров и т.п., эффективным инструментом исследования различных экономических и бизнес-ситуаций. Для того чтобы дать понятие об этом, приведем несколько задач и их решение.

**Задача 1.** Узнав о том, что Эльмира собирается получить 100 000 сомов в кредит на 1 год под 40%, ее знакомый предлагает устроить кредит под 15%, при условии, что она отдаст ему 20% от суммы оформляемого кредита – “шапку”. Нужно ли соглашаться?

**Задача 2.** Получен товар, который должен быть оплачен по схеме “3/15, нетто 45”. Стоит ли использовать предлагаемую скидку?

**Задача 3.** Получен кредит 100 000 сомов на 1 год под 30%. Кредитор говорит, что он согласен и на “льготную” схему погашения кредита – получать по 10 500 сомов в конце каждого месяца ( $10\,500 \cdot 12 = 126\,000$ ) вместо 130 000 в конце года. Какая схема выгоднее?

**Задача 4.** Стоит ли покупать за 160 сомов акцию, по которой накануне выплачены дивиденды 20 сомов, если ожидаемый рост дивидендов 15% в год, а ожидаемая доходность 25%?

**Задача 5.** Как Вы отнесетесь к следующей пенсионной схеме: в течение 10 лет Вы ежемесячно будете вносить по 100 сомов, а в каждый последующий за этими 10 годами месяц Вам или Вашим наследникам будут выплачивать по 300 сомов?

**Задача 6.** Санат может купить оборудование за \$9000 или же получить его на условиях лизинга, заплатив \$5000 и выплачивая по \$1000 в конце каждого из последующих пяти лет. Какой вариант предпочтительнее, если ставка интереса: а) 7%; б) 10%?

**Задача 7.** Фирма “Галина” выпустила облигации номинальной стоимости \$1000, которые будут погашены через 5 лет. По ним дважды в год будут производиться купонные выплаты, исходя из ставки 10%. Оцените эту облигацию, если ожидаемая доходность 8%.

**Задача 8.** В магазине, подводя итоги распродажи мужских рубашек по сниженным ценам, обнаружили интересный факт. Оказывается, первый покупатель купил третью часть всех имевшихся рубашек и еще треть рубашки. Второй покупатель также купил третью часть от оставшихся рубашек и еще треть рубашки. И третий покупатель купил третью часть от оставшихся после второго покупателя рубашек и еще треть рубашки. Та же тенденция наблюдалась и далее. Сколько всего рубашек было в начале распродажи, если после пятого покупателя осталась 31 рубашка?

**Задача 9.** Фирма “Светлана” владеет исключительными правами на производство определенного вида товара. Эти права желают приобрести фирмы А, В и С. Фирма А обещает платить по 3 сома за каждую проданную единицу товара до тех пор пока объем продаж не достигнет 5000 единиц и по 10 сомов за каждую, проданную сверх 5000, единицу. Фирма В не будет платить за первые 3000 единиц товара, а за каждую последующую проданную единицу товара будет платить по 7,5 сомов. Фирма С обещает платить по 3,75 сома за каждую проданную единицу товара до тех пор пока объем продаж не достигнет 8000 единиц и по 15 сомов за каждую, проданную сверх 8000, единицу. Какое решение должна принять фирма “Светлана”?

**Задача 10.** Фирма “УСМ” рассматривает возможность производства нового вида товара. Емкость рынка, по оценкам аналитиков, 100 000. Запуск производственной линии требует \$5000, средние переменные издержки \$3, цена \$5.

Имеется 3 варианта действий.

Можно сразу же произвести и постараться продать 100 000 единиц продукции. В случае успеха (вероятность 60%) будет продан весь товар, в случае неудачи (вероятность 40%) будет продано только 20% товара.

По другому варианту, сначала можно произвести и постараться продать пробную партию – 20 000 единиц продукции в одном из районов, с такими же, как и выше, шансами на успех и неудачу, а затем выпустить основную партию – 80 000 единиц. Если пробная партия будет иметь успех, то вероятность успеха основной партии – 80%, а если пробную партию постигнет неудача, то вероятность успеха основной партии – 10%.

Третий вариант – не связываться с этим товаром.

Какой вариант действий предпочтительней?

**Задача 11.** Контроллер проверяет вес пачек с сахарным песком. Он оштрафует владельца, если “килограммовая” пачка будет содержать меньше чем 995 г сахара. Сколько пачек: одну или 36, должен положить на весы владелец магазина, зная, что при развеске сахарного песка весы были настроены на 990 г? Какова вероятность штрафа в каждом случае, если стандартное отклонение равно 5 г?

#### Решения задач

**Задача 1.** На первый взгляд кажется, что стоит согласиться с предложением, так как  $15\% + 20\% = 35\%$ , а  $35\% < 40\%$ . Но 20% “искусителю” надо отдать сразу – это меняет дело.

Эльмире нужно 100 000 сомов. Взяв их под 40%, через 1 год она должна вернуть 140000 сомов. При другом варианте, для того чтобы получить 100000 сомов, отдав 20% от оформляемой суммы посреднику, Эльмира должна оформить кредит на 125 000 сомов под 15%. Тогда ей придется вернуть  $125\ 000(1 + 0,15) = 143\ 750$  сомов.

И так, прибегая к услугам посредника, Эльмира будет нести не только моральные, но и материальные потери.

Возможен вопрос, влияет ли на ответ сумма кредита – 100 000 сомов?

Если брать напрямую кредит величиной А, то через год нужно вернуть 1,40А, а в ситуации с посредником нужно взять 1,25А, от-

дать посреднику сразу 0,25А, а через год, для того, чтобы расплатиться за кредит нужно отдать

$$1,25A(1 + 0,15) = 1,4375A.$$

**Задача 2.** Схема “3/15, нетто 45” говорит, что, получив товар в кредит, Вы должны заплатить за него в течение 45 дней, но если заплатите в течение 15 дней, то получите скидку 3%.

В результате имеет место дилемма: воспользоваться скидкой или использовать свои деньги лишние 45 – 15 = 30 дней. Для того чтобы сделать правильный выбор, нужно подсчитать соответствующую ставку.

Так, из условий следует, что 3% – это ставка дисконта, отнесенная к 30 дням. Считая, что 30 дней это месяц, а в году 12 месяцев, получаем ставку дисконта 36%.

Для того чтобы вычислить ставку интереса, обозначим стоимость товара через А. Если использовать скидку, то за товар заплатим 0,97А.

Следовательно, ставка интереса равна

$$\frac{A - 0,97A}{0,97A} \cdot \frac{1}{1/12} = \frac{0,03}{0,97} \cdot \frac{12}{1} = 0,3711 = 37,11\%.$$

Предполагая, что каждый месяц состоит из 30 дней (в году 360 дней), мы используем “германскую” систему.

Если же использовать систему, основанную на действующем календаре, то ставка интереса равна

$$\frac{A - 0,97A}{0,97A} \cdot \frac{1}{30/365} = \frac{0,03}{0,97} \cdot \frac{365}{30} = 0,3763 = 37,63\%$$

Опираясь на полученные числа, можно принять правильное решение. Например, если для своих текущих потребностей Вы берете краткосрочные займы, при ставке интереса 40%, то использовать скидку не стоит.

**Задача 3.** Оценка предложения кредитора сводится к вычислению будущего значения аннуита. К примеру, если Вы имеете возможность вкладывать деньги под 24% интереса с условием ежемесячной капитализации (по 24% : 12 = 2% в месяц), то, вкладывая в конце каждого месяца по 10500 сомов, к концу года Вы будете иметь

$$10500 \frac{(1 + 0,02)^{12} - 1}{0,02} = 140826 \text{ сомов, из ко-}$$

торых Вам надо вернуть только 130 000 сомов.

**Задача 4.** Для того чтобы решить, стоит ли покупать акцию, сначала нужно оценить ее стоимость. Для этого обозначим цену акции  $P$ . Сумма  $P$  при доходности  $r$  через год должна вырасти до  $P(1+r)$ . Эту сумму составят дивиденды в размере  $D_1 = D_0(1 + g)$  и право на получение в конце каждого последующего года дивидендов, возрастающих на  $g$  процентов в год. А это право дается владельцу акции, которая стоит  $P(1+g)$ . Из полученного равенства  $P(1+r) = D_1 + P(1+g)$ , выражаем величину  $P : P = D_1 / (r - g)$ .

Итак, оценочная стоимость акции  $\frac{20(1+0,15)}{0,25 - 0,15} = 200$  сомов.

Если Вы собираетесь вложить (инвестировать) в эти акции не слишком большую сумму денег, то вывод – покупать. Если же речь идет о крупной сумме, то имеет смысл провести дополнительный анализ на основе отчета о прибылях и убытках и т.п.

**Задача 5.** Все зависит от ставки интереса, под которую Вы можете инвестировать свои деньги. Самый простой вариант – вложить в банк.

К примеру, если Вы имеете возможность вкладывать деньги на счет под 24% интереса, с условием ежемесячной капитализации (по 24% : 12 = 2% в месяц), то, вкладывая в конце каждого месяца по 100 сомов на этот счет, через 10 лет (= 120 месяцев) Вы будете иметь

$$100 \frac{(1 + 0,02)^{120} - 1}{0,02} = 48824,8 \text{ сомов. Далее, с}$$

этой суммы можно ежемесячно снимать интерес – 2%:  $48824,8 \cdot 0,02 = 976,5$  сомов.

**Задача 6.** Как об этом говорилось выше, выбор варианта зависит от ставки интереса. Для того чтобы выбрать правильный вариант, мысленно положим \$4000 (= 9000 – 5000) на счет, и будем снимать в конце каждого из 5 лет по \$1000. Эти действия описываются разностным уравнением

$$x_n = (1 + k)x_{n-1} - 1000, \text{ с } x_0 = 4000.$$

Его решение:

$$x_5 = 4000(1+k)^5 - 1000 \frac{(1+k)^5 - 1}{k}.$$

Отсюда, при  $k = 7\% = 0,07$   $x_5 = 5610,4 - 5750,7 = -140,3$ . Знак минус говорит о том, что если мы будем использовать лизинг, то в пятый год нам придется доплатить \$140,3 из своего кармана.

А если  $k = 10\% = 0,10$   $x_5 = 6442 - 6105,1 = 336,9$ , т.е., после того как мы произведем все выплаты, на нашем счете останется еще \$336,9.

Итак, если ставка интереса 7%, то выгоднее покупка, а если 10%, то лизинг.

**Задача 7.** Из приведенных условий следует, что через 5 лет владелец облигации получит \$1000. Кроме того, дважды в год он будет получать купонные выплаты по \$50 ( $(10\% \cdot \$1000) : 2$ ). Используя эту информацию, переформулируем задачу: сколько денег нужно положить на счет при ставке интереса 8% сейчас, для того чтобы иметь возможность снимать по \$50 в конце каждого полугодия, с тем, чтобы после десятого раза на счете осталась \$1000.

Переведа все это на язык разностных уравнений, получим задачу на нахождение  $x_0$  из равенства  $(x_{10} =) 1000 = x_0(1+0,04)^{10} - 50 \frac{(1+0,04)^{10} - 1}{0,04}$ .

Ответ:  $x_0 = \$1081,14$ .

**Задача 8.** На первый взгляд, в условиях имеется ошибка, как можно продать треть рубашки? Но все в порядке. Для того чтобы убедиться в этом, обозначим через  $x_k$  количество рубашек, оставшихся после покупателя с номером  $k$ . Тогда, имеем разностное уравнение  $x_k = (2/3)x_{k-1} - 1/3$ .

Его решение

$$(x_5 =) 31 = x_0 \left( \frac{2}{3} \right)^5 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - (2/3)^5}{1 - (2/3)}.$$

Следовательно,  $x_0$  – исходное количество рубашек – равняется 242. Любопытно проверить правильность этого результата:

После 1-го покупателя осталось:  $242(2/3) - 1/3 = 161$  рубашка,

после 2-го:  $161(2/3) - 1/3 = 107$ ,

после 3-го:  $107(2/3) - 1/3 = 71$ ,

после 4-го:  $71(2/3) - 1/3 = 47$ ,

после 5-го покупателя осталось:  $47(2/3) - 1/3 = 31$  рубашка.

**Задача 9.** Для того чтобы принять правильное решение фирма “Светлана” должна ориентироваться на соответствующие функции выручки.

Если права будут проданы фирме А, то функция выручки будет иметь вид:

$$R_A = \begin{cases} 3q, & q \leq 5000, \\ 10(q - 5000) + 15000, & q > 5000. \end{cases}$$

В случае продажи прав фирме В, функция выручки будет иметь вид:

$$R_B = \begin{cases} 0, & q \leq 3000, \\ 7,5(q - 3000), & q > 3000. \end{cases}$$

И наконец, в случае продажи прав фирме С, выручка составит:

$$R_C = \begin{cases} 3,75q, & q \leq 8000, \\ 15(q - 8000) + 30000, & q > 8000. \end{cases}$$

Для того чтобы принять решение, подсчитаем значения функций выручки в характерных точках:

	3000	5000	8000	12000
$R_A$	9000	15000	45000	85000
$R_B$	0	15000	37500	67500
$R_C$	11250	18750	30000	90000

(Точка 12000 выбрана из следующих соображений: начиная с 8000, самая большая плата за единицу продукции – 15 – предлагается фирмой С. Поэтому понятно, что с некоторого момента функция выручки этой фирмы будет иметь наибольшее значение. В выбранной точке имеет место отмеченное событие). Полученные значения показывают, что условия, которые предлагает фирма В, хуже условий фирмы А при любом объеме продаж. Поэтому она должна быть исключена из дальнейшего рассмотрения.

	3000	5000	8000	12000
$R_A$	9000	15000	45000	85000
$R_C$	11250	18750	30000	90000

Предложения фирмы С предпочтительнее, если ожидаются малые (не меньше 5000) или большие (не больше 12000) объемы продаж, при средних значениях стоит иметь дело с

фирмой А. Для того чтобы конкретизировать значения, нужно решить соответствующие уравнения и определить точки перелома (*break-even point*):

$$10(q - 5000) + 15000 = 3,75q \text{ или } q = 5600;$$

$$10(q - 5000) + 15000 = 15(q - 8000) + 30000 \text{ или } q = 11000.$$

Итак, если ожидаемый объем продаж меньше чем 5600 единиц или больше чем 11000 единиц, то фирма “Светлана” должна продать права на производство и продажу фирме С, при остальных значениях выгоднее иметь дело с фирмой А. Процесс выбора решения примет более наглядный вид, если нарисовать соответствующие графики.

**Задача 10.** 1) Если сразу произвести и постараться продать 100 000 единиц продукции, то в случае успеха фирма получит прибыль

$$100\,000(\$5) - \{100\,000(\$3) + \$5000\} =$$

$$= \$195\,000;$$

а в случае неудачи убытки составят

$$20\,000(\$5) - \{100\,000(\$3) + \$5000\} =$$

$$= -\$205\,000.$$

Следовательно, ожидаемая прибыль равна  $0,6(\$195\,000) + 0,4(-\$205\,000) = \$35\,000$ .

2) По второму варианту, если пробная партия – 20 000 единиц – будет иметь успех, то фирма получит прибыль

$$20\,000(\$5) - \{20\,000(\$3) + \$5000\} = \$35\,000.$$

в случае неудачи убытки составят

$$4\,000(\$5) - \{20\,000(\$3) + \$5000\} = -\$45\,000.$$

Если основная партия успешна, то прибыль фирмы

$$80\,000(\$5) - \{80\,000(\$3) + \$5000\} = \$155\,000,$$

а если основной партии не сопутствует успех, то убытки фирмы составят

$$16\,000(\$5) - \{80\,000(\$3) + \$5000\} = -\$165\,000.$$

Следовательно, при успехе пробной партии стоит ожидать, что основная партия принесет прибыль

$$0,8(\$155\,000) + 0,2(-\$165\,000) = \$91\,000,$$

а общая прибыль составит

$$\$35\,000 + \$91\,000 = \$126\,000.$$

Если пробная партия не будет успешной, следует ожидать, что основная партия принесет

$$0,1(\$155\,000) + 0,9(-\$165\,000) = -\$133\,000.$$

То, что ожидаемая сумма отрицательна, говорит нам о нежелательности этого действия.

Итак, если пробная партия не будет успешной, не стоит производить основную пар-

тию и остановиться на сумме – \$45 000, полученной выше.

В результате ожидаемая прибыль по второму варианту составляет

$$0,6(\$126\,000) + 0,4(-\$45\,000) = \$57\,600.$$

3) Третий вариант ни прибыли, ни убытков не принесет.

Сравнив результаты, соответствующие каждому из вариантов, выберем наилучший: при указанных условиях желательно произвести пробную партию, и только если она будет успешной, произвести основную.

**Задача 11.** Ответ на первый вопрос почти очевиден – конечно, только одну – вдруг повезет, так как с увеличением числа пачек средний вес взвешиваемых пачек будет приближаться к 990.

Вероятность штрафа в случае 1-ой пачки определяется значением стандартной нормальной переменной

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{995 - 990}{5} = 1.$$

Соответствующая вероятность

$$P(z \leq 1) = 0,8413.$$

В случае с 36 пачками

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{995 - 990}{5 / \sqrt{36}} = 6. \text{ Как известно,}$$

если значение стандартной нормальной переменной больше 3, соответствующая вероятность почти 100%.

Надеемся, что эти задачи, если даже и не убедили в необходимости количественных методов, то хотя бы вызвали интерес. Для того чтобы более подробно разобрать решения этих и большого количества других задач подобного типа, потребуется время и, возможно, специализированный курс по количественным методам.

#### Литература

1. Ричард Томас. Количественные методы анализа хозяйственной деятельности. – М.: ДиС, 1999. – 432 с.

2. Уотшем Т.Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 527 с.