УДК 517. 962.2, 519. 876.2

Г.А.КАЛДЫБАЕВА, А.ДЖ.САТЫБАЕВ

E-mail: ksucta@elcat.kg

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Макалада термосерпилгичтин экилик түз маселенин чечиминин жалгыздыгы далилденген.

В данной статье доказана единственность решения двумерной прямой задачи термоупругости.

In article uniqueness of the decision of a two-dimensional direct problem of termo elasticity is proved.

Прямые задачи термоупругости поставлены и рассмотрены в монографиях А.Д.Коваленко /1/, Н.И.Мусхелишивили /2/, а обратные задачи термоупругости – в монографии В.Г.Яхно /3/, в препринте В.А.Козлова и др. /4/.

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерную динамическую прямую задачу термоупругости с плоской границей. Нестационарные термоупругие деформации в твердом упругом изотропном теле описывается уравнением А.А.Самарского, П.Н.Вабищевича /5, с. 512/, т.е. уравнением плоских перемещений

$$\rho(\tilde{a},\acute{o})\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial t^2}=\mu(x,y)\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial x^2}+\left(2\mu(x,y)+\lambda(x,y)\right)\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial y^2}-\left[\left(3\mu(x,y)+2\lambda(x,y)\right)\right]*P_1\left[\Psi(x,y,t)\right],$$

$$x\in R_+,\quad y\in R,\ t\in R_+,\qquad (1)$$

где $\rho(x,y)$, $\mu(x,y)$, $\lambda(x,y)$ – плотность среды и коэффициенты Ламэ двумерной среды, $U(x,y,t)$ – тепловое возмущение двумерной среды, $P_1\left[\Psi(x,y,t)\right]=\int_0^{\Psi(x,y,t)}\alpha(\xi)d\xi$, $\Psi(x,y,t)$ –приращения температуры, $\alpha(\xi)$ – тепловое расширение.

Прямая задача заключается в определении функции $U(x,y,t)\in W_2^1$ при известных функциях $\rho(x,y)$, $\mu(x,y)$, $\lambda(x,y)$, $P_1\left[\Psi(x,y,t)\right]$, а также при заданных начальных и граничных условиях следующего вида:

$$U\big|_{t<0} \equiv 0,\ x \in R_{+},\quad y \in R,$$

(2)

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{1}{2} h(y)\delta(t),\quad y \in (-D, D),$$

(3)

где $h(y)$ – источник - заданная функция, $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.

Пусть относительно заданных функций выполнены условия:

$$\rho(x,y),\qquad \mu\ (x,y),\ \ \lambda(x,y) \in \Lambda_1,\ \ \mu\ (x,y) = -\ \lambda(x,y),$$

(4)

$$h(y) \in \Lambda_2 . \qquad\qquad P_1\left[\Psi(x,y,t)\right] \in \Lambda_3,$$

(5)

$$\Lambda_1 = \begin{cases} \rho_1(x, ó) \in C^6((0,d)\times(-D_1, D_1)),\ \ suðp\ \{\rho_1(x, ó)\} \subset ((0,d)\times(-D_1, D_1)), \\ a = \|\rho_1\|_{C^2((0,d)\times(-D_1,D_1))},\quad a \langle\langle\ M_1 \end{cases},$$

где $\Lambda_2 = \{suðp\ h(ó) \in (-D, D), h(ó) \in C^5(-D, D)\},\ \ 0 < M_1, M_2, M_3, D_1, d = const .$

$$D = D_1 + T(M_2 + a),\ T = 2d/(M_1 - a)$$

$$\Lambda_3 = \left\{P(\Psi(x,y,t)) \in C^2(\Omega(T,D)), P_x'(\Psi(+0,y,t)) = 0,\ \ 0 < M_4 \le \sup p\{P(\Psi(x,y,t))\} \le M_5\right\},$$

$$\Omega(T,D) = \{\Delta(T)\times(-D,D)\},\quad \Delta(T) = \{(\alpha,t) : |\alpha| < t < T\}.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (4)-(5). Тогда решение задачи (1)-(3) существует в классе $W_2^1(\Omega(T,D))$ и имеет производные до четвертого порядка включительно в области регулярности $\Omega(T,D)$.

Решению прямых задач в постановке (1)-(3) посвящено много литературы. Нами эта задача рассмотрена конечно-разностным методом, но для применения этого метода вначале поставленная задача приведена к задаче с данными на характеристиках по методу выделения сингулярной и регулярной части решения задачи, разработанной В.Г.Романовым /6/.

1.2. Получение регулярной задачи с данными на характеристиках

Учитывая условия (4)-(5), а также гиперболичности уравнений, можно установить, что решение задачи (1)-(3) равно нулю при $y \ge \pm D,\quad D = D_1 + M_1 T,\quad T -$ фиксированное число из R_+. Пусть выполнено условие (4), тогда из (1) получим

$$\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial t^2} = \frac{\mu(x,y)}{\rho(x,y)}\left[\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial y^2} - P_1(\Psi(x,y,t)\right],$$

$$x \in (0,d),\quad t \in (0,T),\quad y \in (-D,D),\quad D = D_1 + M_1 * T.$$

Введем новую переменную *α(x,y),* удовлетворяющую задаче:

$$\alpha_x^2+\alpha_y^2=\frac{\rho(x,y)}{\mu(x,y)},\qquad \alpha\big|_{x=0}=0,\ \ \alpha_x\bigg|_{x=0}=\frac{\rho(0,y)}{\mu(0,y)},\ \ \alpha_x>0,\lim_{z\to\infty}\alpha(z,y)=\infty$$

(6)

и новые функции

$$в(\alpha,y)=\mu(x,y),\ c(\alpha,y)=\rho(x,y),\ \vartheta(\alpha,y,t)=U(x,y,t),\ P\ [\Psi(\alpha,y,t)]=P_1\ [\Psi(x,y,t)]\ ,$$

тогда задача имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\vartheta(\alpha,y,t)}{\partial\alpha^2}+\frac{\hat{a}(\alpha,y)}{\tilde{n}(\alpha,y)}\left[\Delta\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}-P\ [\Psi(\alpha,y,t)]\right],\quad(\alpha,y,t)\in\Omega(T,D),\\&\vartheta(\alpha,y,t)\Big|_{y=\pm D}=0,\quad\vartheta(\alpha,y,t)\Big|_{t<0}=0,\qquad\vartheta_\alpha^{'}(\alpha,y,t)\Big|_{\alpha=0}=\frac{\hat{a}(0,y)}{c(0,y)}h(y)\delta(t).\end{aligned}\right\}$$

(7)

Регулярные и сингулярные части решения задачи (7) выделим по методике /6/, представляя решение задачи в виде

$$\vartheta(\alpha,y,t)=\tilde{\vartheta}(\alpha,y,t)+S(t,y)\theta(t-|\alpha|)+R(t,y)\theta_1(t-|\alpha|),$$

(8)

$\tilde{\vartheta}(\alpha,y,t)$ – непрерывная функция, $\theta(t)$–функция Хевисайда $\theta_1(t)=\theta(t)t,\quad \theta_{-1}(t)=\delta(t)$..

Выполним некоторые выкладки

$$\vartheta(\alpha,y,t)=\tilde{\vartheta}(\alpha,y,t)+S(\alpha,y)\theta(t-|\alpha|)+R(\alpha,y)\theta_1(t-|\alpha|),$$

$$\vartheta_{tt}(\alpha,y,t)=\tilde{\vartheta}_{tt}(\alpha,y,t)+S(\alpha,y)\delta_t^{'}(t-|\alpha|)+R(\alpha,y)\delta(t-|\alpha|),$$

$$\vartheta_\alpha=\tilde{\vartheta}_\alpha+S_\alpha^{'}\theta-S\delta+R_\alpha^{'}\theta_1-R\theta,\qquad\vartheta_{\alpha\alpha}=\tilde{\vartheta}_{\alpha\alpha}+S_{\alpha\alpha}^{''}\theta-2S^{'}\delta+S\delta^{'}+R_{\alpha\alpha}^{''}\theta_1-2R_\alpha^{'}\theta+R\delta.$$

Поставляя эти выражения в уравнение и в начальные условия (7), получим

$$\begin{aligned}&\tilde{\vartheta}_{tt}+S\delta^{'}+R\delta=\tilde{\vartheta}_{\alpha\alpha}+S^{''}\theta-2S^{'}\delta+S\delta^{'}+R^{''}\theta_1-2R^{'}\theta+R\delta+\\&+\frac{b(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\left[\Delta\alpha\left(\tilde{\vartheta}_\alpha+S^{'}\theta-S\delta+R^{'}\theta_1-R\theta\right)-P(\Psi(\alpha,y,t))\right],\end{aligned}$$

$$\vartheta\,|_{\alpha=0}=\tilde{\vartheta}_\alpha\,|_{\alpha=0}+S_\alpha^{'}(0,y)\theta(t)-S(0,y)\delta(t)+R_\alpha^{'}(0,y)\theta_1(t)-R(0,y)\theta(t)=\frac{b(o,y)}{c(o,y)}h(y)\delta(t.)$$

Так как $\tilde{\vartheta}\,|_{\alpha=0}=0,\quad R_\alpha^{'}(0,y)=0$ и предпологаем, что $R(0,y)=S_\alpha^{'}(0,y),$ получим

$$\left\{ S'_\alpha(\alpha,y)+\frac{1}{2}\frac{b(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\Delta\alpha * S(\alpha,y)=0, \quad S(0,y)=\frac{b(0,y)}{c(0,y)}h(y). \right.$$

$$2*R'_\alpha(\alpha,y)-S''_{\alpha\alpha}(\alpha,y)+\frac{b(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\Delta\alpha\big(R(\alpha,y)-S'_\alpha(\alpha,y)\big)=0, \quad S''_{\alpha\alpha}=-\frac{1}{2}\left(\frac{b(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\Delta\alpha * S(\alpha,y)\right)'_\alpha$$

$$2R'_\alpha+\frac{1}{2}\left(\frac{b(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\Delta\alpha S(\alpha,y)\right)'_\alpha+\frac{b(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\Delta\alpha\big(R(\alpha,y)-S'(\alpha,y)\big)=0, \quad R(0,y)=S'_\alpha(0,y);$$

$$R(\alpha,y)=S_\alpha(0,y)-\frac{1}{4}\left(\frac{b(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\Delta\alpha S(\alpha,y)\right)-\frac{1}{2}\int_0^\alpha\frac{b(\xi,y)}{c(\xi,y)}\Delta\xi*\big(R(\xi,y)-S'_\xi(\xi,y)\big)d\xi.$$

$$R(\alpha,y)\theta_1(t-|\alpha|)\,\big|_{t=|\alpha|}=R(\alpha,y)(t-|\alpha|)\theta(t-|\alpha|)\,\big|_{t=|\alpha|}=R(|\alpha|,y)*0*\theta(0)=0.$$

Т.о., мы получили следующие задачи относительно функций $S(\alpha,y)$ и $R(\alpha,y)$

$$\left\{ S'_\alpha(\alpha,y)+\frac{1}{2}\frac{b(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\Delta\alpha * S(\alpha,y)=0, \quad S(0,y)=\frac{b(0,y)}{c(0,y)}h(y). \right.$$

$$\left\{ R'_\alpha(\alpha,y)-\frac{1}{2}S''_{\alpha\alpha}(\alpha,y)+\frac{1}{2}\frac{b(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\Delta\alpha\big(R(\alpha,y)-S'_\alpha(\alpha,y)\big)=0, \quad R(0,y)=S'_\alpha(0,y). \right.$$

Решим первую задачу

$$\frac{S'_\alpha}{S}=-\frac{1}{2}\frac{b(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\Delta\alpha, \quad S(0,y)=\frac{b(0,y)}{c(0,y)}h(y), \quad (\ln S)'=-\frac{1}{2}\frac{b(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\Delta\alpha=\ln S(\alpha,y)-\ln S(0,y),$$

$$\ln\frac{S(\alpha,y)}{S(0,y)}=-\frac{1}{2}\int_0^\alpha\frac{b(\xi,y)}{c(\xi,y)}\Delta\xi d\xi, \quad S(\alpha,y)=\frac{b(0,y)}{c(0,y)}h(y)\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_0^\alpha\frac{b(\xi,y)}{c(\xi,y)}\Delta\xi d\xi\Big).$$

Решая вторую задачу, т.е. задачу относительно $R(\alpha,y)$, имеем

$$R(\alpha,y)=S'_\alpha(0,y)-\frac{1}{4}\left(\frac{b(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}\Delta\alpha * S(\alpha,y)\right)-\frac{1}{2}\int_0^\alpha\frac{b(\xi,y)}{c(\xi,y)}\Delta\xi*\big(R(\xi,y)-S'_\xi(\xi,y)\big)d\xi.$$

Существование решений последнего интегро-дифференциального уравнения, при выполнении условий (4)-(5), можно найти в /7/.

В силу гиперболичности уравнения и условий (4)-(5) решение задачи (7) равно нулю вне характеристического угла, в этом случае и непрерывная функция $\tilde{\vartheta}(\alpha,y,t)$ также равна нулю вне характеристического угла, следовательно $\left.\widetilde{\vartheta}(\alpha,y,t)\right|_{t=|\alpha|}=0$, а значит $\left.\vartheta(\alpha,y,t)\right|_{|\alpha|=t}=S(t,y).$

Учитывая (8.) и $\lambda(x,y)=-\mu(x,y)$, из вышеизложенного получим следующую задачу с данными на характеристиках, эквивалентную к задаче (1)-(3):

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha^2}+L\vartheta(\alpha,y,t), \quad |\alpha|<t<T, \quad \alpha\in(-T,T),\\
\left.\vartheta(\alpha,y,t)\right|_{|\alpha|=t}=S(t,y), \qquad t\in(0,T), \quad y\in(-D,D),\\
\left.\vartheta(\alpha,y,t)\right|_{y=\pm D}=0, \quad t\in(|\alpha|,T), \quad \alpha\in(-T,T),
\end{array}\right\}$$

(9)

где $L(\alpha,y,t)=\dfrac{\hat{a}(\alpha,y)}{\tilde{n}(\alpha,y)}\left[\Delta\alpha\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}-P\;[\Psi(\alpha,y,t)]\right], \quad (\alpha,y,t)\in\Omega(T,D),$

1.3. Теорема единственности

Введем обозначение и норму

$$\ddot{I}_1=\max_{|\alpha|\le T}\max_{y\in(-D,D)}\left\{|\hat{a}(\alpha,y)|\right\}, \quad \ddot{I}_2=\max_{|\alpha|\le T}\max_{y\in(-D,D)}\left\{|\tilde{n}(\alpha,y)|,h(\acute{o})\right\}, \quad \ddot{I}_3=\min_{|\alpha|\le T}\min_{y\in(-D,D)}\left\{|\tilde{n}(\alpha,y)|\right\},$$

$$\ddot{I}_4=\max_{z\in R_+}\max_{y\in(-D,D)}\left\{|\Delta\alpha(z,y)|\right\}, \quad \ddot{I}_5=\max_{|\alpha|\le T}\max_{y\in(-D,D)}\max_{|\alpha|\le t\le T}P(\Psi(\alpha,y,t)),$$

$$\|\vartheta\|^2(t)=\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\vartheta^2(\alpha,y,t)\,d\alpha\,dy, \quad t\in[0,T].$$

Умножая обе части уравнения (1.9.) на $2\dfrac{\partial\vartheta}{\partial t}$, затем проинтегрируя в области $\Omega(T,D)$ и учитывая следующие выкладки:

$$2\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)^2\right], \quad 2\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha^2}=2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right]-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right)^2,$$

получим

$$\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t} 2\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}\left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \tau^2}-\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \alpha^2}-L\vartheta(\alpha,y,t)\right]d\alpha dy d\tau = \int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\left[\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}\right)^2+\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}\right)^2\right]\Bigg|_{\tau=|\alpha|}^{\tau=t} d\alpha dy -$$

$$-\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t} 2\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}[\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}*\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}]d\alpha dy d\tau -$$

$$-\int_{|\alpha|}^{t}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t} 2\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}\frac{\hat{a}(\alpha,y)}{c(\alpha,y)}(\Delta\alpha\,\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}-P(\Psi(\alpha,y,\tau)))d\alpha dy d\tau = 0$$

(11)

Используя введенные обозначения и полученные выражения из (11), имеем

$$\|\vartheta\|_1^2(\mathrm{t}) \le 2\|\vartheta\|_1^2(|\alpha|)+\frac{2\Pi_1\Pi_4}{\Pi_3}\int_{|\alpha|}^{\mathrm{t}}\left|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right|(\tau)d\tau+\frac{2\Pi_1\Pi_5}{\Pi_3}\int_{|\alpha|}^{\mathrm{t}}\left|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right|(\tau)d\tau.$$

(12)

Здесь $\|\vartheta\|_1^2(t)=\|\vartheta_t\|^2(t)+\|\vartheta_\alpha\|^2(t)+\dfrac{2\ddot{I}_1\ddot{I}_5}{\ddot{I}_3}\|\vartheta_t\|^2(t).$

Можарируем интеграл

$$\int_{|\alpha|}^{t}\left\|\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}\right\|(\tau)d\tau \le \int_{|\alpha|}^{t}\left[\left\|\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}\right\|^2+\left\|\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}\right\|^2\right](\tau)d\tau \le \int_{|\alpha|}^{t}\|\vartheta\|_1^2(\tau)d\tau\ .$$

Тогда из последнего неравенства (12) имеем

$$\|\vartheta\|_1^2(t) \le 2*\|\vartheta\|_1^2(|\alpha|)\cdot\exp\left[\left(\frac{2\ddot{I}_1\ddot{I}_4}{\ddot{I}_3}+\frac{2\ddot{I}_1\ddot{I}_5}{\ddot{I}_3}\right)t\right].$$

Используя энергетические неравенства для гиперболических уравнений, из последнего получим

$$\max_{|\alpha|\le\tau\le t\le T}\left\{\|\vartheta\|_2^2(\tau)\right\} \le 2*\|\vartheta\|_2^2(|\alpha|)*\exp\left[\left(\frac{2\ddot{I}_1\ddot{I}_4}{\ddot{I}_3}+\frac{2\ddot{I}_1\ddot{I}_5}{\ddot{I}_3}\right)t\right],$$

где $\|\vartheta\|_2^2(t)=\left(\|\vartheta\|^2+\|\vartheta_t\|^2+\|\vartheta_\alpha\|^2+\|\vartheta_y\|^2\right)(t).$

Теорема 2. Пусть функции $\tilde{n}(\alpha,\acute{o}),\hat{a}(\alpha,\acute{o}),\Delta\alpha$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка и пусть решение задачи (9) существует и принадлежит к классу $C^2(\Omega(T,D))$ и выполнены (6),(6[1]). Тогда решение задачи (9) – единственное в области регулярности $\Omega(T,D)$ и имеет места оценка

$$\max_{|\alpha|\le t\le T}\left\{\|\upsilon\|_2^2\ (t)\right\}\le\|\upsilon\|_2^2\ (|\alpha|) * \exp(\ \Pi\ t),$$

(13)

где $\ddot{I} = 2 * \ddot{I}_1 * (\ddot{I}_4 + \ddot{I}_5) / \ddot{I}_3$.

Из эквивалентности задач (9) и (1)-(3) следует, что решение задачи (1)-(3) также единственно в области $\Omega(T,D)$ при выполнении условии теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко А.Д. Термоупргость. – Киев: Изд-во АН УССР, 1975. – 216 с.
2. Мусхелишивили Н.И. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. – М.: Наука, 1976.
3. Яхно В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние,1990. – 296 с.
4. Козлов В.А., Мазья В.Г., Фомин А.В. Обратная задача термоупругости. – Л.: ЛИМАШ. Препринт № 5. 1989. – 15 с.
5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Наука, 1991. – 785 с.
6. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. – М.: Научный мир, 2005. – 296 с.
7. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сиб. научн. изд-во, 2009. – 458 с.