УДК 517.2+517.977.1/5

Шарипов К.С., Шарипов К.С., Шарипов С.
КазНУ им. аль-Фараби Республика Казахстан
ИГУ им. К.Тыныстанова

ОБ УПРАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

Впервые разработана теория управления процессами с интегральными уравнениями Фредгольма первого рода.

Постановка задачи.

Теория оптимальных процессов рассматривает задачи, где ищется кривая линия доставляющая экстремум заданному критерию качества (функционалу) Υ .

Теперь поставим задачу так: найти кривую линию такую, что на ней заданный функционал Υ принимал заданное значения λ:

$$\Upsilon = \lambda \ ? \tag{1}$$

Здесь особо отметим, что:

1) функционал может быть как определенный интеграл, кратный интеграл, трех-кратный интеграл и т.д.;

2) функционал может быть как некоторое выражение, не содержащее хотя бы один из вышеупомянутых интегралов.

3) функционал может быть образован из функционалов 1) и 2).

В данной статье рассматривается случай 1), т.е. интегральный функционал, в частности, вида

$$\Upsilon = \int_{t_0}^{T} F(t, y(t)dt\,. \tag{2}$$

В этом случае задача (1) имеет вид: найти кривую линию

$$y=f(t, u(t)) \ , \quad t\in [t_0, T] \ , \tag{3}$$

где *u(t)* - неизвестная функция, такая, что на ней критерий качества (функционал) (2) принимает заданное действительное значение $\lambda[1]$

$$\int_{t_o}^{T} F(t, y(t)dt = \lambda\,. \tag{4}$$

Для нахождения кривой линии (3) используем дифференциальную задачу, в частности, вида

$$y' + p(t)y = q(t) \ , \quad t\in [t_0, T]. \tag{5}$$

С этой целью задаем некоторые ограничения на *y(t)* и *q(t)*

Рассмотрим случай, когда решение *y(t)* уравнения (5) порождается под влиянием правой части *q(t).* Это обозначаем так

$$y=y(t,q(t)) \ , \quad t\in [t_0, T] \ : \tag{6}$$

1) фазовые ограничения

$$y(t) \in G(y(t)); \tag{7}$$

2) ограничения на правую часть

$$q(t) \in G(q(t). \tag{8}$$

Здесь *p(t)* , *q(t)* $\in C_{[t_0, T]}$. А *G(y(t))* - совокупность заданных дополнительных условий для выделения частного решения уравнения (5). Различные заданные ограничения на функцию *q(t)* содержатся в *G(q(t)).*

Итак: найти решение *y(t ,q(t))* уравнения (5), удовлетворяющее условиям (7) и (8), которое является и решением интегрального уравнения Фредгольма первого рода (4) ?

Видно, что интегральное уравнение Фредгольма первого рода (4) нужно отнести к условиям (7).

Траектория, закрепленная в начальной точке .

Договоримся, что условие (7) всегда содержит условие вида $y(t_0) = y_0$, его выделим из $Gy(t)$ и отнесем к начальному условию.

В этом случае имеем усовершенствованную задачу Коши вида

$$y' + p(t)y = q(t)\,, \quad t\in [t_0,T]: \tag{9}$$

1) начальное условие

$$y(t_0) = y_0; \tag{10}$$

2) условия управления (фазовые ограничения)

$$y(t) \in G(y(t)); \tag{11}$$

3) ограничения на правую часть

$$q(t) \in G(q(t). \tag{12}$$

Значит, исследуется задача: при каких правых частях $q(t)$ решение задачи Коши (9)-(10) удовлетворяет условиям управления (11) ?

Теперь данную задачу рассмотрим при заданных условиях управления (11).

Пусть, в частности, условия (11) дано в виде

$$G(y) = \left\{ \int_{t_0}^{T} y(t), q(t)dt = \lambda \right\}. \tag{13}$$

Тогда усовершенствованная задач Коши записывается так:

$$y' + p(t)y = q(t)\,, \quad t\in [t_0,T]: \tag{14}$$

1) начальное условие

$$y(t_0) = y_0\ ; \tag{15}$$

2) условия управления

$$\int_{t_0}^{T} y(t), q(t)dt = \lambda\,; \tag{16}$$

3) ограничения на правую часть

$$q(t) \in G(q(t). \tag{17}$$

Теперь дадим ограничение на правую часть, т.е. выясним структуру совокупности функции $G(q(t))$, способствующей исследованию данной задачи.

Пусть

$$G(q(t)) = \{ f(t,\beta) \}\,, \ t\in [t_0,T], \tag{18}$$

где β - параметр, а $f(t,\beta)$ - непрерывная функция своих аргументов. Значит правую часть $q(t)$ ищем из совокупной (18) частности в виде

$$q(t) = \beta f(t)\,, \ t\in [t_0,T]. \tag{19}$$

В этом случае имеем усовершенствованную задачу Коши вида

$$y' + p(t)y = \beta f(t)\,, \ t\in [t_0,T]: \tag{20}$$

1) начальное условие

$$y(t_0) = y_0, \tag{21}$$

2) условие управления

$$\int_{t_0}^{T} y(t)q(t)dt = \lambda\,. \tag{22}$$

Задача Коши (20)-(21) имеет решения вида

$$y = y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + \beta \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} f(s)ds\,, \qquad t\in [t_0,T] \tag{23}$$

С учетом (19) и (23) из (22) имеем

$$\int_{t_0}^{T}\beta(f)(y_0e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}+\beta\int_{t_0}^{t}e^{-\int_{s}^{t}p(\tau)d\tau}f(s)ds\ ))dt=\lambda\,, \tag{24}$$

отсюда

$$\beta_{1/2}=\frac{-y_0d_2\pm\sqrt{y_0^2d_2^2+4\lambda d_1}}{2d_1}\qquad (d_1\neq 0). \tag{25}$$

Здесь

$$d_1=\int_{t_0}^{T}f(t)\int_{t_0}^{t}e^{-\int_{s}^{t}p(s)ds}f(s)dsdt\ ,\ d_2=\int_{t_0}^{T}f(t)e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}dt \tag{26}$$

Подставляя (25) в (23), имеем две кривых линии

$$y_1=y_0e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}+\frac{-y_0d_2+\sqrt{y_0^2d_2^2+4\lambda d_1}}{2d_1}\int_{t_0}^{t}e^{-\int_{s}^{t}p(\tau)d\tau}f(s)ds\,,\ t\in[t_0,T] \qquad 27)$$

$$y_1=y_0e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}-\frac{y_0d_2+\sqrt{y_0^2d_2^2+4\lambda d_1}}{2d_1}\int_{t_0}^{t}e^{-\int_{s}^{t}p(\tau)d\tau}f(s)ds\,,\ t\in[t_0,T] \tag{28}$$

А также, подставляя (25) в (19), имеем правые части, которые порождали решения (27) и (28) соответственно

$$q_1(t)=\frac{-y_0d_2+\sqrt{y_0^2d_2^2+4\lambda d_1}}{2d_1}f_1(t),\quad t\in[t_0,T] \tag{29}$$

$$q_2(t)=-\frac{y_0d_2+\sqrt{y_0^2d_2^2+4\lambda d_1}}{2d_1}f_1(t),\quad t\in[t_0,T] \tag{30}$$

Полученные функции (27) и(28) в классе правых частей (29) и (30) будут решениями усовершенствованной задачи Коши (20)-(22).

Отсюда следует, что в классе правых частей (29) и (30) эти две функции (27) и (28) также являются решениями интегрального уравнения Фредгольма первого рода (22).

1) Если $\qquad y_0^2d_2^2+4\lambda d_1>0\,,$ (31)

то параметры (25) и правые части (29) и (30) и полученные функции (27) и (28) являются действительными.

2) Если

$$y_0^2d_2^2+4\lambda d_1<0\,, \tag{32}$$

то параметры (25) и правые части (29) и (30) и полученные функции (27) и (28) являются комплексными.

3) Если

$$y_0^2d_2^2+4\lambda d_1=0\,, \tag{33}$$

то имеем, что

$$\begin{aligned}&\beta_1=\beta_2,\\&q_1=q_2\,(\mathrm{t}),\\&y_1=y_2\,(\mathrm{t}).\end{aligned} \tag{34}$$

В случае неравенства (32) решения (27) и (28) правые части (29) и (30) являются комплексными функциями, однако значение λ есть действительное число.

Итак, в совокупности правых частей (19) найдутся две кривые линии такие , что на них определенный интеграл

$$\int_{t_0}^{T} y(t)q(t)dt \tag{35}$$

принимает одно и то же значение, равное λ.

Траектория, порожденная задачей Коши (20)-(21) закреплена в точке $t = t_0$ так $y(t_0) = y_0$, а при $t = T$ (по формуле (27)) найдем $y(T)$:

$$y_1(T) = y_0 e^{-\int_{t_0}^{T} p(s)ds} + \frac{-y_0 d_2 + \sqrt{y_0^2 d_2^2 + 4\lambda d_1}}{2d_1} \int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f(s)ds, \tag{36}$$

а по формуле (28) имеем

$$y_2(T) = y_0 e^{-\int_{t_0}^{T} p(s)ds} - \frac{y_0 d_2 + \sqrt{y_0^2 d_2^2 + 4\lambda d_1}}{2d_1} \int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f(s)ds, \tag{37}$$

отсюда имеем следующее свойство

$$y_1(T) - y_2(T) = \frac{\sqrt{y_0^2 d_2^2 + 4\lambda d_1}}{d_1} \int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f(s)ds \tag{38}$$

при $y_0 = 0$ имеем

$$y_1(T) - y_2(T) = 2\sqrt{\frac{\lambda}{d_1}} \int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(\tau)d\tau} f(s)ds \tag{39}$$

Отсюда следует , что при малых λ и $y_0 = 0$ две кривые (27) и (28), выходящие из одной точки $y(0) = 0$ в точке $t = T$ лежат близко друг к другу.

При $\lambda = 0$

$$\int_{t_0}^{T} y(t)q(t)dt = 0 \tag{40}$$

в классе правых частей $q_2(t) = -y_0 \dfrac{d_2}{d_1} f_1(t)$ колебательное решение имеет вид

$$y_2 = y_0 \left[e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} - \frac{d_2}{d_1} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} f(s)ds \right], \quad t \in [t_0, T] \tag{41}$$

Итак, нами разработана теория управления решением задач Коши с интегральным уравнением Фредгольма первого рода.

Теперь будем рассматривать управление решением краевой задачи управления с интегральным уравнением Фредгольма первого рода. Этому вопросу будет посвящена отдельная статья.

Литература:

1. Шарипов С., Шарипов К.С., Шарипов К.С. Определенный интеграл от кривой обладающая некоторыми свойствами. // Известия КТУ им. И.Раззакова, № 17. -Б., 2009.