УДК 517.217

Мурзакматов М. У. , Исабеков К.А,
ЫГУ им. К.Тыныстанова, г.Каракол

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА I РОДА МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Рассматривается применение метода регуляризации А.Н.Тихонова к решению некорректного интегрального уравнения Фредгольма первого рода

Многие задачи математики, механики, физики и техники приводятся к интегральным уравнениям. Интегральные уравнения с приближенно заданными правой частью и ядром поставлены некорректно. Решение таких задач устойчивыми методами имеет важное теоретическое и практическое значение.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с ядром *B(x,s)*

$$\int_a^b B(x,s)u(s)ds = f(x), \qquad c \le x \le d. \tag{1}$$

где $u(s)$ – искомая функция из пространства; U , $f(x)$ – заданная функция из пространства *F*. Будем полагать, что ядро *B(x,s)* по переменной *x* является непрерывной функцией с непрерывной частной производной $\frac{\partial B}{\partial x}$.

Решение $u(s)$ будем искать в классе непрерывных на отрезке *[a,b]* функций. Уклонение правых частей друг от друга будем оценивать в квадратической метрике, т.е. по формуле

$$\rho_{L_2}(f_1,f_2) = \left\{ \int_c^d [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx \right\}^{1/2}$$

(метрика L_2), а уклонение решения $u(s)$ – в равномерной метрике, т.е. по формуле

$$\rho_C(u_1,u_2) = \max_{a \le s \le b} |u_1(s) - u_2(s)|$$

(метрика C).

Пусть для некоторой правой части $f = f_1(x)$ функция $u_1(s)$ является решением уравнения (1), т.е.

$$Au = f_1(x),$$

где

$$Au = \int_a^b B(x,s)u(s)ds.$$

Если вместо функции $f_1(x)$ нам известно лишь ее приближение *f(x),* мало отличающееся (в метрике L_2) от $f_1(x)$*),* то мы можем найти не точное, а лишь приближенное к *u(s)* решение уравнения (1). При этом правая часть *f(x)* может быть получена в эксперименте, например, с помощью самописца и иметь угловые точки, в которых функция *f(x)* не имеет производной. При такой правой части *f(x)* уравнение (1) не имеет решения, понимаемого в классическом смысле, т.е. определяемого по формуле $u = A^{-1} f$, где A^{-1} – оператор, обратный оператору A в уравнении (1), так как ядро *B(x,s)* имеет непрерывную производную по *x* и, следовательно, правая часть также должна иметь непрерывную производную по *x*.

Кроме того, решение уравнения (1) не обладает свойством устойчивости к малым изменениям исходных данных (правой части *f(x)*).

На практике необходимо находить лишь устойчивые к малым изменениям правой части решения уравнения (1), так как это требование связано с физической детерминированностью явления, описываемого этим уравнением, с возможностью физической интерпретации решения.

В условиях, когда вместо точной правой части f_T уравнения (1) нам известны лишь некоторое ее приближение f_δ и число $\delta>0$, такие, что $\rho_F(f_T, f_\delta) \le \delta$, то задача решения интегрального уравнения (1) является некорректной. Рассмотрим алгоритм приближенного решения уравнения (1) с неточно заданной правой частью методом регуляризации А.Н. Тихонова [1].

Пусть имеем уравнение

$$\int_a^b B(x,s)u(s)ds = f(x), \qquad c \le x \le d, \tag{2}$$

где ядро *B(x,s)* предполагается непрерывным по совокупности переменных *(x,s)* в замкнутой области $\{a \le s \le b, \quad c \le x \le d\}$. Будем искать приближенное решение среди функций множества $U_1 = W_2^1[a,b]$, для которых

$$\rho_{L_2}(Au, f_\delta) \le \delta .$$

Однако нельзя брать в качестве приближенного решения уравнения (2) произвольную функцию из множества U_1, так как такое решение не будет устойчивым к малым изменениям правой части $f_\delta(x)$. Необходим принцип отбора, обеспечивающий устойчивое приближенное решение. На функциях $u(s)$ из U_1 определены функционалы вида

$$\Omega[u] = \int_a^b \left\{ u^2(s) + p\left(\frac{du}{ds}\right)^2 \right\} ds, \tag{3}$$

где $p>0$ – число.

Поскольку $\Omega[u]$ – неотрицательный функционал, то существует его точная нижняя грань. Принцип отбора состоит в том, что в качестве искомого приближенного решения предлагается брать функцию $u_\delta(s)$, на которой достигается точная нижняя грань функционала $\Omega[u]$ на множестве U_1. Тогда задача нахождения функции $u_\delta(s)$, удовлетворяющей условию $\rho_{L_2}(Au_\delta, f_\delta) \le \delta$ и минимизирующей функционал $\Omega[u]$ на множестве U_1, сводится к поиску функции u_α, минимизирующей следующий сглаживающий функционал

$$M^\alpha[u, f_\delta] = \rho_{L_2}^2(Au, f_\delta) + \alpha\,\Omega[u] . \tag{4}$$

Здесь α – параметр регуляризации, который определяется из условия

$$\rho_{L_2}(Au_\delta, f_\delta) = \delta,$$

т.е. по невязке.

Таким образом, требуется решить задачу минимизации функционала

$$M^\alpha[u, f_\delta] = \int_c^d \left\{ \int_a^b B(x,s)u(s)ds - f_\delta(x) \right\}^2 dx + \alpha \int_a^b \left\{ u^2(s) + p\left(\frac{du}{ds}\right)^2 \right\} ds \ . \qquad (5)$$

Независимо от информации о граничных условиях точного решения $\bar{u}(s)$ на концах отрезка *[a,b]* при редукции задачи минимизации функционала (5) к решению соответствующего ему уравнения Эйлера необходимо требовать от решений последнего удовлетворения в точках $s=a$ и $s=b$ условия равенства нулю функции $u_\alpha(s)$ или его производной.

Составим для функционала (5) уравнение Эйлера:

$$\int_a^b \bar{B}(s,t)u(t)dt + \alpha(u(s) - pu''(s)) = g(s), \qquad (6)$$

$$u'(a) = 0, \ u'(b) = 0,$$

где

$$\bar{B}(s,t) = \int_c^d B(x,s)\, B(x,t)dx,$$

$$g(s) = \int_c^d b(x,s) f_\delta(x)dx,$$

и выпишем соответствующую ему разностную задачу на равномерной сетке. Разобьем отрезок *[a,b]* на *n* частей, а отрезок *[c,d]* – на *m* равных частей точками

$$s_i = a + ih, \ i = 0,1,2...,n; \ s_n = b,$$

$$x_j = c + jl, \ j = 0,1,2...,m; \ x_m = d.$$

Здесь $h = (b-a)/n, l = (d-c)/m.$

Заменив в уравнении (6) интегралы соответствующими им интегральными суммами, например, по формуле трапеций, а $u''(s)$ – соответствующим разностным отношением, получим

$$\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\{\bar{B}(s_i,t_{j-1})u_{j-1} + \bar{B}(s_i,t_j)u_j\right\} + \alpha u_i - \frac{\alpha p}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) = g_i, \qquad (7)$$

где

$$g_i = \int_c^d B(x,s)\, f_\delta(x)dx, \quad i = 1,2,...,n.$$

Производные $u''(s_0) = u''(a) = u_0''$ и $u''(s_n) = u''(b) = u_n''$ вычисляются по формулам

$$u_0'' \approx \frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{h^2}, \quad u_n'' \approx \frac{u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n}{h^2} \ . \qquad (8)$$

Значения $\bar{B}(s_i,t_j)$ и g_i либо вычисляются аналитически, либо получаются с помощью формулы трапеций:

$$\bar{B}(s_i,t_j) = \int_c^d B(x,s_i)\, b(x,t_j)\, dx \approx \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{m}\left\{B(x_{k-1},s_i)B(x_{k-1},t_j) + B(x_k,s_i)B(x_k,t_j)\right\}, \qquad (9)$$

$$g_i = \int_c^d B(x, s_i)\, f_\delta(x)\, dx \approx \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{m}\left\{B(x_{k-1}, s_i)\, f_\delta^{k-1} + B(x_k, s_i)\, f_\delta^{k}\right\}. \qquad (10)$$

Необходимо отметить, что число точек сетки по s не связано с числом точек сетки по x.

Используя формулы (8)-(10), вместо уравнения (6) получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$B_\alpha u \equiv Bu + \frac{\alpha}{h^2}Cu = g. \qquad (11)$$

Здесь $B = (b_{ij}) \quad (i, j = 0,1,\ldots,n)$ – матрица с элементами

$$b_{ij} = \beta_i\left\{B(x_0, s_i)B(x_0, t_j) + 2\sum_{k=1}^{m-1}B(x_k, s_i)B(x_k, t_j) + B(x_m, s_i)b(x_m, t_j)\right\},$$

где

$$\beta_0 = \beta_n = \frac{hl}{4}, \quad \beta_i = \frac{hl}{2}, \quad i = 1,2,\ldots,n-1;$$

С – матрица вида

$$\begin{pmatrix} h^2 - p & 2p & -p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -p & h^2 + 2p & -p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & h^2 + 2p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -p & h^2 + 2p & -p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -p & 2p & h^2 - p \end{pmatrix},$$

g – вектор с компонентами $(g_0, \quad g_1, \quad \ldots, \quad g_n)^T$,

где

$$g_i \approx \frac{l}{2}\left\{B(x_0, s_i)\, f_\delta^0 + 2\sum_{k=1}^{m-1}B(x_k, s_i)\, f_\delta^k + B(x_m, s_i)\, f_\delta^m\right\}, \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

Систему (11)можно решить одним из точных или приближенных методов, например, методом Гаусса.

Приведем пример расчета модельной задачи [2]. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_{-1}^{1} B(x, s)\, u(s) ds = f(x), \quad -1 \le x \le 1. \qquad (12)$$

Здесь

$$B(x, s) = \frac{1}{1 = (x - s)^2}, \quad \bar{u}(s) = (1 - s^2)^2, \quad -1 \le s \le 1.$$

Значение $\overline{f}(x)$ получим прямым интегрированием:

$$\overline{f}(x) = 2x(x^2 - 2)\ln\left(\frac{1 + (x-1)^2}{1 + (x+1)^2}\right) + (x^4 - 8x^2 + 4) arctg\frac{2}{x^2} + 6(x^2 - 1) + \frac{2}{3}.$$

Задачу решаем на равномерной сетке по x и s. Число точек сетки по x и s равно 21. Возмущенное значение правой части получено при помощи датчика случайных чисел:

$$f_\delta(x_i) = \overline{f}(x_i)\left[1 + \varepsilon(\xi_i - 0.5)\right].$$

Здесь характеризует уровни погрешности, ξ_i – реализация случайной величины с равномерным распределением на отрезке *[0, 1]*. За величину погрешности принимаем

$$\delta = \left\| f_\delta - \overline{f} \right\|_{l_2} = \left\{ \sum_{i=1}^{21} \left[f_\delta(x_i) - \overline{f}(x_i) \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

В табл.1 приведены точные и приближенные значения искомой функции, а на рис. 1 показаны графики точного и приближенных решений уравнения (12) при $\varepsilon = 0.01, \quad \varepsilon = 0.1, \quad \varepsilon = 0.5$.

Таблица 1

Точное решение уравнения	Приближенное решение уравнения при		
	$\varepsilon = 0{,}01$	$\varepsilon = 0{,}1$	$\varepsilon = 0{,}5$
0	0,038	0,047	0,085
0,036	0,043	0,046	0,162
0,13	0,149	0,162	0,258
0,26	0,277	0,298	0,363
0,41	0,418	0,446	0,474
0,563	0,564	0,594	0,581
0,706	0,704	0,726	0,676
0,828	0,827	0,836	0,749
0,922	0,921	0,912	0,797
0,98	0,976	0,948	0,813
1	0,993	0,946	0,806
0,98	0,968	0,904	0,776
0,922	0,903	0,834	0,73
0,828	0,805	0,74	0,675
0,706	0,682	0,634	0,617
0,562	0,549	0,526	0,558
0,41	0,41	0,421	0,507
0,26	0,28	0,327	0,463
0,13	0,166	0,248	0,425
0,036	0,071	0,183	0,392
0	0	0,133	0,362

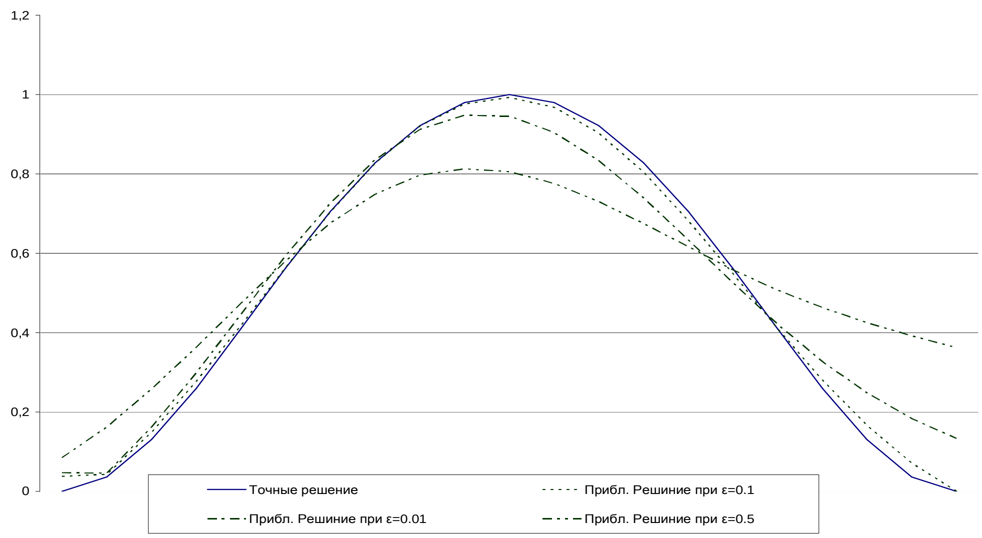

Рис.1

Литература:

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.–М: Наука, 1986.–288 с.
2. Гончарский А. В., Черепащук А.М., Ягола А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. – М.: Наука, 1978. – 336 с