УДК 517.217

Мурзакматов М.У., Байболотов Б.А.,
ЫГУ им. К. Тыныстанова, г. Каракол

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Рассматривается применение метода регуляризации А.Н.Тихонова для задач сглаживания информации и частного дифференцирования функции, заданной приближено.

Функции, получаемые из эксперимента или путем измерений и наблюдений, неизбежно содержат погрешности. Для использования их в расчетах необходимо сначала «сглаживать» их значения. Во многих задачах требуется находить их производные.

Задача нахождения производной n-го порядка $u(x)$ от функции $f(x)$ такая, что $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$, сводится к решению интегрального уравнения первого рода [1]

$$\int_0^x \frac{1}{(n-1)!}(x-s)^{n-1}u(s)ds=f_\delta(x). \qquad (1)$$

Эта задача не обладает свойством устойчивости, что приводит к большим затруднениям при приближенном вычислении производных.

Решение уравнения (1) сводится к нахождению функции $u(x)$, сообщающей минимум следующему сглаживающему функционалу [1]

$$M^\alpha[u,f_\delta]=\int_c^d\left\{\int_0^x K(x,s)u(s)ds-f_\delta(x)\right\}^2dx+\alpha\int_0^x\left\{u^2(s)+\left(\frac{du}{ds}\right)^2\right\}ds. \qquad (2)$$

Здесь

$$K(x,s)=\frac{1}{(n-1)!}(x-s)^{n-1};$$

n означает порядок производной функции $f_\delta(x)$; α – параметр регуляризации.

Составим для функционала (2) уравнение Эйлера

$$\int_0^x \overline{K}(s,t)u(t)dt+\alpha(u(s)-u''(s))=g(s), \qquad (3)$$

где

$$\overline{K}(s,t)=\int_c^d K(x,s)K(x,t)dx, \quad g(s)=\int_c^d K(x,s)f_\delta(x)dx.$$

Дискретизируем задачу (3) на равномерной сетке. Отрезок $[c,d]$ разобъем на n равных частей точками

$$x_j=c+jl,\ \ j=0,1,\ldots,n; \quad x_n=d,\ \ l=(d-c)/n.$$

Интегралы в уравнении (3) заменим интегральными суммами по формуле трапеций, а $u''(s)$ – разностным отношением:

$$\frac{l}{2}\sum_{j=1}^n\left\{\overline{K}(s_i,t_{j-1})u_{j-1}+\overline{K}(s_i,t_j)u_j\right\}+\alpha u_i-\frac{\alpha}{l^2}(u_{i-1}-2u_i+u_{i+1})=g_i, \qquad (4)$$

где

$$g_i=\int_c^d K(x,s_i)f_\delta(x)dx, \qquad i=0,1,\ldots n.$$

Производные $u''(s)$ на концах отрезка $[c,d]$ вычисляются по формулам

$$u''_o \approx \frac{u_o - 2u_1 + u_2}{l^2} \quad , \quad u''_n \approx \frac{u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n}{l^2} .$$

(5)

Значения $\overline{K}(s_i , t_j)$ и g_i вычисляются также по формуле трапеций:

$$\overline{K}(s_i , t_j) = \int_c^d K(x,s_i) K(x,t_j) dx \approx \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{n} \left\{ K(x_{k-1}, s_i) K(x_{k-1}, t_j) + K(x_k ,s_i) K(x_k ,t_j) \right\} \quad (6)$$

$$g_i = \int_c^d K(x,s_i) f_\delta(x)\, dx \approx \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{n} \left\{ K(x_{k-1},s_i) f_\delta^{\ k-1} + K(x_k ,s_i) f_\delta^{\ k} \right\}. \quad (7)$$

Подставляя формулы (5), (6), (7) в (4), получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$B_\alpha u \equiv Bu + \frac{\alpha}{l^2} Cu = g \ . \quad (8)$$

Здесь $B = (b_{i\,j})$ $(i, j = 0,1,\mathrm{K} \ ,n)$ – матрица с элементами

$$b_{i\,j} = \beta_i \left\{ K(x_0 ,s_i) K (x_o ,t_j) + 2\sum_{k=1}^{n-1} K(x_k ,s_i) K (x_k , t_j) + K (x_n ,s_i) K (x_n , t_j) \right\},$$

где

$$\beta_o = \beta_n = l^2 / 4, \quad \beta_i = l^2 / 2, \qquad i = 1,2,\mathrm{K} \ , n-1 ;$$

C – матрица вида

$$C = \begin{pmatrix} l^2 - 1 & 2 & -1 & 0 & \mathrm{K} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & l^2 + 2 & -1 & 0 & \mathrm{K} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & l^2 + 2 & -1 & \mathrm{K} & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{K\,K\,K\,K} & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \mathrm{K\,K\,K\,K\,K} & \mathrm{K\,K\,K\,K\,K} & \ldots\ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{K} & -1 & l^2 + 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{K} & -1 & 2 & l^2 - 1 \end{pmatrix} ;$$

g – вектор с компонентами $(g_0 , \ \ g_1 ,\mathrm{K} \ ,g_m)^T$,

где

$$g_i \approx \frac{l}{2} \left\{ K (x_o , \ \ s_i) f_\delta^{\ o} + 2\sum_{k=1}^{n-1} K (x_k , \ s_i) f_\delta^{\ k} + K(x_m , \ s_i) f_\delta^{\ m} \ \right\}, \qquad i = 0,1,...,n.$$

Пусть вместо $f(x)$ мы имеем $f_\delta(x_i) = f(x_i) [1 + \varepsilon(v_i - 0{,}5)]$, где ε – уровень погрешности, v_i – случайные числа на отрезке $[0,1]$.

В случае первой производной, т. е. при $n=1$ имеем $K(x,s) = 1$, поэтому $\overline{K}(s,t) = \xi$, а матрица B имеет элементы $b_{i\,j} = \beta_i \left(\xi_o + 2\sum_{k=1}^{n-1} \xi_k + \xi_n \right)$.

Для нахождения первой производной можно составить другой функционал Тихонова [2]

$$M^\alpha [u, f_\delta] = \| u - f_\delta \|^2_{L_2} + \alpha \| u \|^2_{W_2^1} ,$$

(9)

соответствующий задаче

$$Eu = f , \quad u \in W_2^1 , \quad f \in L_2 , \quad (10)$$

где E – оператор вложения из W_2^1 в L_2. Из общей теории следует, что если u_δ^α – экстремаль функционала (9), а значение параметра α (δ) выбрано по критерию невязки

$$\rho(\alpha) = \left\| u_\delta^\alpha - f_\delta \right\|_{L_2}^2 = \delta^2,$$

то

$$\lim_{\delta \to 0} \left\| u_\delta^\alpha - \overline{u} \right\|_{W_2^1} = \lim_{\delta \to 0} \left\| u_\delta^\alpha - \overline{f} \right\|_{W_2^1} = 0.$$

Таким образом, функция $u_\delta^\alpha(x)$ дифференцируема почти всюду и ее производная $\frac{d}{dx} u_\delta^\alpha(x)$ при $\delta \to 0$ стремится к $\frac{d}{dx}\overline{f}(x)$ в норме L_2.

Если задача решается со свободными концами, т.е. $\overline{f'}(c) = \overline{f'}(d) = 0$, то, приравнивая к нулю первую вариацию функционала (9), получим уравнение для экстремали функционала:

$$u - f_\delta + \alpha u - \alpha u'' = 0, \quad u'(c) = u'(d) = 0. \qquad (11)$$

Выберем по x равномерную сетку с шагом $l = (d - c)/n: \quad x_i = c + i\,l, \quad i = 0, 1, ..., n$. Тогда для внутренних точек сетки

$$u_i + \alpha u_i - \frac{\alpha}{l^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) = f_i, \qquad i = 1, ..., n-1,$$

или

$$-\frac{\alpha}{l^2} u_{i-1} + \left(1 + \alpha + \frac{2\alpha}{l^2}\right) u_i - \frac{\alpha}{l^2} u_{i+1} = f_i,\ i = 1, 2, ..., n-1. \qquad (12)$$

Так как

$$u_0'' \approx \frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{l^2}, \qquad u_n'' \approx \frac{u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n}{l^2},$$

то для $i = 0$ и $i = n$ получаем уравнения

$$\left(1 + \alpha - \frac{\alpha}{l^2}\right) u_0 + \frac{2\alpha}{l^2} u_1 - \frac{\alpha}{l^2} u_2 = f_0$$

(13)

и

$$-\frac{\alpha}{l^2} u_{n-2} + \frac{2\alpha}{l^2} u_{n-1} + \left(1 + \alpha - \frac{\alpha}{l^2}\right) u_n = f_n \qquad (14)$$

соответственно.

Полученная система уравнений (12) – (14) легко решается для фиксированного α методом прогонки. Устойчивость метода прогонки при наших значениях коэффициентов гарантируется [3]. Значение параметра регуляризации α может быть выбрано по критерию невязки.

Рассмотрим примеры приближенного вычисления производных 1 – го порядка [1]. Пусть:

1) $f_1(x) = \int_0^{x-2} e^{-t^4} dt$. Тогда $u'(x) = e^{-\xi^4}, \quad \xi = x - 2$.

2) $f_2(x) = \int_0^x \sin\xi\, d\xi$. Тогда $u'(x) = \sin x$.

Графики точных и приближенных производных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ показаны соответственно на рис. 1 и 2. Уровень погрешности правой части в обоих случаях равен $\varepsilon = 20\%$.

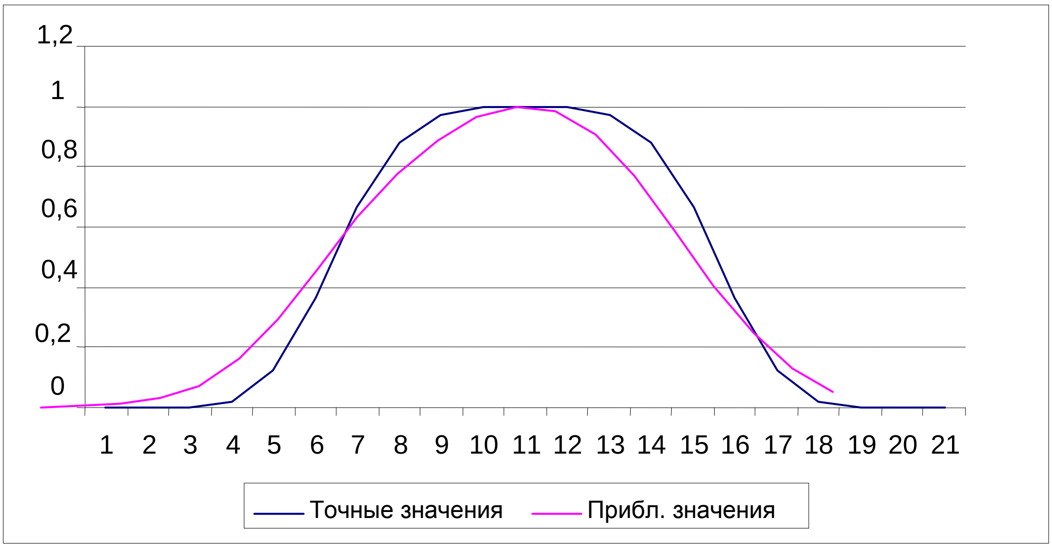

Рис.1. График функции $u'(x) = e^{-\xi^4}$, $\xi = x - 2$.

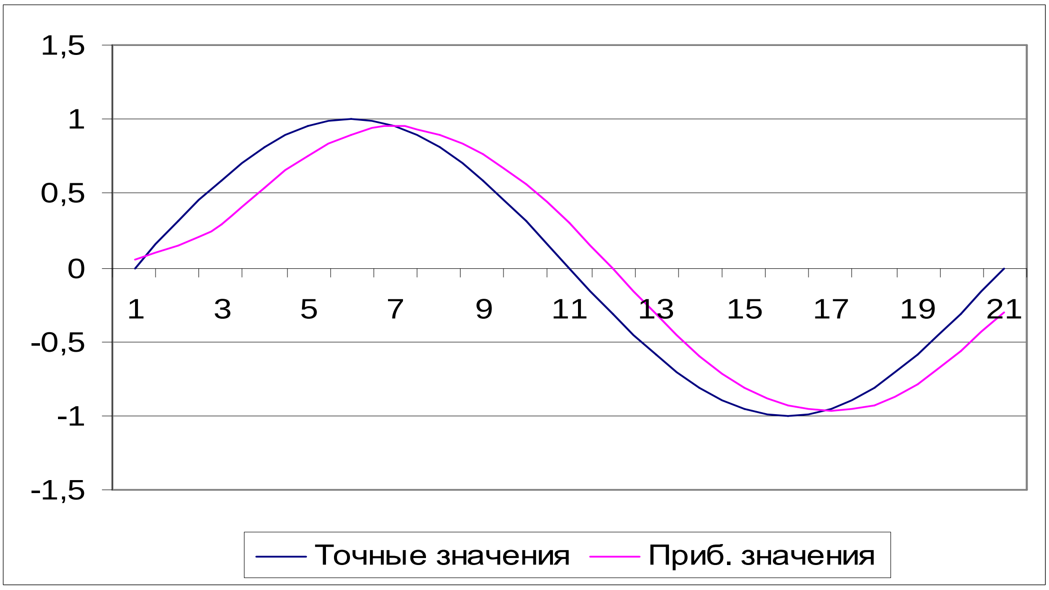

Рис. 2. График функции $u'(x) = sin\, x$.

Литература:

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

2. Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. – М.: Наука, 1978. – 336 с.

Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с