УДК 51:53

Асанбаева Дж. А., Ашыралиева Г.М.

ЗАКОН ВИДЕМАНА-ФРАНЦА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ КВАНТОВОЙ.

Videman-Franz s

Rule is analyzed in tze point of view of classic and quant theory of thisics and coefficient of transter of electron gas in metals haw been received.

Анализированы закон Видемана-Франца с точки зрения классической и квантовой теории физики. Получены коэффициенты переноса электронного газа в металлах.

В работе анализируется закон Видемана-Франца с точек зрения классической и квантовой теориям физики и доказывается, что он подтверждается точнее с точки зрения квантовой теории.

Целью настоящей работы является анализ закона Видемана-Франца по классической и квантовой теорий физики и сравнение их результатов с экспериментальными данными на примере нихрома.

Известно, что в металлах электроны образуют “электронный газ” подобно идеальному газу. Поэтому к электронному газу можно применять молекулярно-кинетическую теорию для молекул идеального газа, в том числе и законов явлений переноса. Поскольку ионная решетка металла почти не участвует в явлениях переноса, основными носителями в переносах являются электроны. Но электроны ведут себя по-разному при рассмотрении с классической и квантовой теорий.

Рассмотрим электронный газ в металлах по классической теории и выведем коэффициенты переноса и коэффициент электропроводности для него.

По закону Видемана-Франца отношение коэффициента теплопроводности к коэффициенту электропроводности металлов не зависит от их природы и зависит только от температуры и пишется так:

$$\frac{\aleph}{\gamma} = 2{,}45\cdot 10^{-8} T\,, \qquad (1)$$

где $\aleph$ -коэффициент теплопроводности,

γ-коэффициент электропроводности (или удельная электропроводность), Т-абсолютная температура. По формуле (1) для любого металла при одной и той же температуре Т это отношение должно быть одинаковым. Например, при нормальных условиях Т=293 К оно будет равно

$$\frac{\aleph}{\gamma} = 7{,}18\cdot 10^{-6}\,\hat{A}\grave{o}\ \cdot \hat{I}\grave{i} \qquad (2)$$

Такое значение (2) будет иметь для всех видов металла, например, и для нихрома. Теперь выведем эту же формулу теории по формулам коэффициентов переноса. Коэффициент диффузии для электронного газа

$$\ddot{A}_{\acute{y}} = \frac{1}{3}\pi\ \upsilon\ \phi\pi\ \lambda\phi\,, \qquad (3)$$

где $\pi\ \upsilon\ \phi$ -средняя скорость хаотического движения электронов, а $\pi\ \lambda\phi$ -средняя длина свободного пробега электронов в электронном газе. Вычислим $\pi\ \upsilon\ \phi$ по известной для молекул идеального газа формуле

$$\pi\ \upsilon\ \phi = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_e}}\,, \qquad (4)$$

где k -постоянная Больцмана, Т-абсолютная температура, а m_e -масса электрона.

$$\pi\,\mathcal{U}\,\phi = \sqrt{\frac{8\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}}{3{,}14\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}}} = 1{,}06\cdot 10^{5}\,\text{ì}\;/c.$$

Вычислим $\pi\,\lambda\,\phi$ по формуле

$$\pi\,\lambda\,\phi = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot \sigma_{\text{ýô}}\cdot \text{ï}}, \qquad (5)$$

где $\sigma_{\text{ýô}}$ -эффективное сечение столкновения электронов, п-концентрация электронов, а

$$\sigma_{\text{ýô}} = \pi \cdot \mathrm{r}^2_{\text{ýô}}, \qquad (6)$$

где $\mathrm{r}^2_{\text{ýô}}$ -эффективный радиус столкновения, котороый приняли равным $\mathrm{r}_{\text{ýô}} = 10^{-9}\,\text{ì}$ с тем соображением, что такое значение меньше на порядок размера атома водорода, но больше размера ядра в 10^6 раз. Число электронов в единице обьема металла равно $n \approx 10^{28}\,\text{ì}^{-3}$. В таком случае

$$\pi\,\lambda\,\phi = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 3{,}14\cdot 10^{-18}\cdot 10^{28}} = 2{,}25\cdot 10^{-19}\,\text{ì}\;.$$

Полученные значения подставляем в (3):

$$\text{Ä}_{\text{ý}} = \frac{1}{3}\cdot 1{,}06\cdot 10^{5}\cdot 2{,}25\cdot 10^{-9} = 7{,}95\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{ì}^{2}}{\tilde{n}}.$$

Вычислим коэффициент внутреннего трения электронов в электронном газе по формуле

$$\eta_{\text{ý}} = \text{Ä}_{\text{ý}}\cdot \rho_{\text{ý}}, \qquad (7)$$

где $\rho_{\text{ý}}$-плотность электронного газа, которую можно найти по формуле

$$\rho_{\text{ý}} = \text{ï}\cdot \mathrm{m_e}. \qquad (8)$$

Следовательно,

$$\eta_{\text{ý}} = 7{,}95\cdot 10^{-7}\cdot 10^{28}\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31} = 7{,}24\cdot 10^{-9}\,\text{Ïà}\cdot \tilde{n}.$$

Вычислим коэффициент теплопроводности по формуле

$$\aleph_{\text{ý}} = \eta_{\text{ý}}\cdot \tilde{N}_{\mathrm{v}\text{ý}}, \qquad (9)$$

где C_V-удельная масса электронного газа, которая определяется как

$$\tilde{N}_{\mathrm{V}\text{ý}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\cdot\frac{R}{M}, \qquad (10)$$

Где R- универсальная (молярная) газовая постоянная, М-молярная масса электронного газа, определяемая как

$$M = N_a\cdot m_e, \qquad (11)$$

где N_a-число Авогадро, $i-$число степеней свободы одного электрона, которое будет равно $i = 3$.

Вычислим $\aleph_{\text{ý}}$ по (9) с учетом (10) и (11):

$$\aleph_{\text{ý}} = \eta_{\text{ý}}\,\frac{\mathrm{i}}{2}\,\frac{R}{Na\cdot m_e} = 7{,}24\cdot 10^{-9}\,\frac{3}{2}\cdot\frac{8{,}85}{6{,}02\cdot 10^{23}\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}} = 0{,}175\,\frac{B_{\text{Ò}}}{\text{ì}\cdot \hat{E}}.$$

Формула для коэффициента электропроводности по классической и квантовой теориям одна и та же

$$\gamma_{\text{ý}} = \frac{\text{ï}\cdot \mathring{a}^{2}\,\pi\,\lambda\,\phi}{2\mathrm{m_e}\,\pi\,\mathcal{U}\,\phi}, \qquad (12)$$

где п-концентрация электронов в металле. В формулу (12) подставим численные значения величин:

$$\gamma = \frac{10^{28}(1{,}6\cdot 10^{-19})^{2}\cdot 2{,}25\cdot 10^{11}}{2\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}06\cdot 10^{5}} = 2{,}98\cdot 10^{4}\,\hat{\text{Î}}\text{ì}^{-1}\cdot \text{ì}^{-1}.$$

Теперь найдем отношение

$$\frac{\aleph}{\gamma} = \frac{0{,}175}{2{,}98\cdot 10^{4}} = 5{,}87\cdot 10^{-6}\,\hat{\text{À}}\text{ò}\cdot \hat{\text{Î}}\text{ì} \qquad (13)$$

Таким образом, полученный результат (13) отношения $\frac{\aleph}{\gamma}$ отличается от такого же отношения по закону Видемана-Франца (2) на 18%. Далее выведем это отношение из квантовой теории электронного газа в металлах. По квантовой теории электронный газ в металлах находится в вырожденном состоянии и электроны имеют энергию, в среднем равную

$$\pi\ \varepsilon\ \phi = \frac{3}{5}\varepsilon_F\ , \qquad (14)$$

где ε_F -энергия Ферми, которая определяется по формуле

$$\varepsilon_F = (3\pi^2)^{2/3} \cdot \frac{\eta^2}{2m_e} \cdot n^{2/3}, \qquad (15)$$

где n- концентрация электронов в металле.

Приравнивая кинетическую энегию электронов к этой средней энергии (15), найдем среднюю скорость электронов в металле:

$$\frac{m_e\ \pi\ \upsilon\ \phi^2}{2} = \pi\ \varepsilon\ \phi\ . \qquad (16)$$

Отсюда $\pi\ \upsilon\ \phi^2 = \frac{2\ \pi\ \varepsilon\ \phi}{m_e} = \frac{2}{m_e} \cdot \frac{3}{5}\left(3\pi^2\right)^{2/3} \cdot \frac{\eta^2}{2m^e} \cdot n^{2/3} = 3\left(\frac{\eta}{m_e}\right)^2 \sqrt[3]{\left(3\pi^2 \cdot n\right)^2}\ .$ (17)

Отсюда найдем $\pi\ \upsilon\ \phi$ после подстановки численных значений величин:

$\pi\ \upsilon\ \phi = 1{,}35 \cdot 10^6\ \grave{\imath}\ \ /\ \tilde{n}.$

Значение $\pi\ \lambda\ \phi$ будет таким же, как в случае классической теории электронного газа, т.е. равное $2{,}25 \cdot 10^{11}\ \grave{\imath}$. По полученным выше данным найдем коэффициенты переноса электронного газа в металлах. Коэффициент диффузии

$$\ddot{A}_{\acute{y}} = \frac{1}{3}\ \pi\ \upsilon\ \phi\pi\ \lambda\ \phi = \frac{1}{3} 1{,}35 \cdot 10^6 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-11} = 1{,}02 \cdot 10^{-5}\ \grave{\imath}^{\ 2} / \tilde{n}. \qquad (18)$$

Коэффициент внутреннего трения

$$\eta_{\acute{y}} = \ddot{A}_{\acute{y}} \cdot \rho_{\acute{y}} = \mathrm{\ddot{A}}_{\acute{y}} \cdot \mathrm{n} \cdot \mathrm{m_e} = 1{,}02 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{28} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} = 9{,}3 \cdot 10^{-8}\ \ddot{I}\grave{a}\ \cdot \tilde{n}. \qquad (19)$$

Коэффициент теплопроводности

$$\aleph_{\acute{y}} = \eta_{\acute{y}} \cdot \tilde{n}_{\mathrm{v}}\ , \qquad (20)$$

где c_v -удельная теплоемкость из-за выражденности электронного газа составляет всего сотую часть универсальной газовой постоянной, т.е. $c_v = \frac{0{,}01R}{M}$, где М- молярная масса электронного газа, тогда $c_v = 1{,}46 \cdot 10^6\ \frac{\ddot{A}\text{æ}}{\hat{e}\tilde{a} \cdot \hat{E}}$; следовательно,

$$\aleph_{\acute{y}} = 0{,}134 \frac{\hat{A}\grave{o}}{\grave{\imath}\ \cdot \hat{E}} \qquad (21)$$

Коэффициент электропроводности будет вычислен по такой же формуле (12) в случае классической теории и равен $\alpha = 2{,}3 \cdot 10^3 \hat{I}\grave{\imath}^{\ \ -1} \cdot \grave{\imath}^{\ -1}$.

$$\frac{\aleph_{\acute{y}}}{\gamma_{\acute{y}}} = \frac{0{,}134}{2{,}3 \cdot 10^3} = 5{,}8 \cdot 10^{-5} \hat{A}\grave{o}\ \cdot \hat{I}\grave{\imath}\ \ . \qquad (22)$$

Это отношение (22), полученное из квантовой теории, отличается от отношения по закону Видемана-Франца (2) на 37%. Для удобства анализа результатов вычислений сведем их в одну таблицу с приведением экспериментальных данных для нихрома

	По классической теории	По квантовой теории	по эксперименту

	$\pi\, \upsilon\, \phi$	$1{,}06 \cdot 10^{5}\, \grave{\imath}\ / \tilde{n}$		
	$\pi\, \lambda\, \phi$	$2{,}25 \cdot 10^{-11}\, \grave{\imath}$		
	$\ddot{A}_{\acute{y}}$	$7{,}95 \cdot 10^{-7}\, \grave{\imath}^{\ 2} / \tilde{n}$		
	$\eta_{\acute{y}}$	$7{,}24 \cdot 10^{-9}\, \ddot{I}\grave{a}\ \cdot \tilde{n}$		
	$\aleph_{\acute{y}}$	$0{,}175 \hat{A}\grave{o}\ / \grave{\imath}\ \cdot \hat{E}$	$12 \hat{A}\grave{o}\ / \grave{\imath}\ \cdot \hat{E}$	
	γ	$2{,}98 \cdot 10^{4}\, \hat{I}\grave{\imath}^{\ -1} \cdot \grave{\imath}^{\ -1}$	$0{,}91 \cdot 10^{6}\, \hat{I}\grave{\imath}^{\ -1} \cdot \grave{\imath}^{\ -1}$	
	$\dfrac{\aleph_{\acute{y}}}{\gamma}$	$5{,}87 \cdot 10^{-5}\, \hat{A}\grave{o}\ \cdot \hat{I}\grave{\imath}$	$1{,}32 \cdot 10^{-5}\, \hat{A}\grave{o}\ \cdot \hat{I}\grave{\imath}$	

Экспериментальное значение для γ получено на основании справочных данных для удельного сопротивления, равного $\rho = 1{,}1 \cdot 10^{-6} \hat{I}\grave{\imath}\ \cdot \grave{\imath}$ как обратной величины, т.е. $\gamma = \dfrac{1}{\rho}$. Экспериментальное значение $\aleph_{\acute{y}}$ получилось приблизительно в $70 \div 80$ раз больше, чем по теории. Экспериментальное значение отношения $\dfrac{\aleph}{\gamma}$ по порядку совпадает с результатом квантовой теории и приблизительно в 4 раза меньше, по результатам классической теории оно в 40 раз больше. Таким образом, квантовая теория ближе к экспериментальным данным. Однако коэффициент теплопроводности по квантовой и по классической теориям резко отличается от экспериментального значения. А результаты коэффициентов диффузии и внутреннего трения вроде соответствуют логике теорий. Коэффициент диффузии электронов в металле на порядок больше, чем по квантовой теории, а внутреннее трение по квантовой теории на порядок больше, чем по классической, но по этим коэффициентам нет экспериментальных значений. А вот несоответствие коэффициентов теплопроводности по теориям экспериментальным значениям требует теоретических объяснений. Ниже постараемся сделать такое.

Как известно, электронный газ в металлах находится в вырожденном состоянии вплоть до температур их плавления, следовательно, в переносе тепла и электричества участвует очень слабо. Поэтому приходится допускать, что в тепловом переносе в основном участвует тепловое излучение в виде инфракрасных электромагнитных излучений, состоящих из фотонов. Известный закон теплопроводности пишется так [1];

$$\Delta \mathrm{Q} = \aleph_{\mathrm{p}} \cdot \frac{dT}{dx} \cdot \Delta S \cdot \Delta t\,, \qquad (23)$$

где ΔQ -перенесенная теплота, $\aleph_{p}$ -теплопроводность ионной решетки металла, $\dfrac{\Delta T}{dx}$ - градиент температуры, ΔS -площадь, через которую проходит теплота, Δt -время. Поскольку любое тело при любых температурах, выше абсолютного нуля, оно излучает тепловое излучение с лучеизлучательной способностью, равной

$$M_{T} = \frac{\Delta Q}{\Delta t \cdot \Delta S}\,. \qquad (24)$$

В этом случае формулу (23) можно переписать в виде

$$M_{T} = \aleph_{p} \cdot \frac{\Delta T}{dx}\,. \qquad (25)$$

Для M_{T} можем использовать закон Стефана-Больцмана для теплового излучения [1]:

$$M_{T} = \sigma \cdot T^{4} \qquad (26)$$

где σ -постоянная Стефана-Больцмана ; Т- абсолютная температура. Из (25) и (26) получим

$$\aleph_p = \frac{\sigma \cdot T^4}{dT \setminus dx}. \qquad (27)$$

Для Т=293 К и градиенте температуры $\frac{dT}{dx} \cong 40\frac{K}{M}$ получим

$$\aleph_p = \frac{5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot (293)^4 \cdot 8}{293} \approx 11\frac{B\grave{o}}{\grave{\imath} \cdot \hat{E}}.$$

Полученное значение более-менее подходит к экспериментальному значению $\aleph$, равному $\aleph = 12\frac{B\grave{o}}{\grave{\imath} \cdot \hat{E}}$, однако отношения $\frac{\aleph}{\gamma}$ по теориям и по экспериментальным данным отличаются от закона Видемана-Франца на 2 порядка, а именно: экспериментальное значение получается больше, чем значение, полученное по закону Видемана-Франца. Отсюда вытекает то, что формула для удельной электропроводности (12) требует более тщательного анализа.

Принято назвать электрическим током направленное движение электрических зарядов в проводниках [1]. Однако известно, что скорость направленного движения электронов в металле ничтожно мала и не соответствует скорости распространения тока по проводникам, так как ток распространяется почти мгновенно на большие расстояния. Поэтому электрическому току можно давать следующее определение: распространение электромагнитных волн в проводниках, обусловленное направленным движением электрических зарядов, называется электрическим током.

Попытаемся доказать такое определение электрическому току. При приложении к проводнику напряжения и отдельные электроны электронного газа ускоряются вдоль проводника. Определим скорость таких электронов при U= 220 В. По формуле, вытекающей из равенства кинетической энергии электрона и энергии ускорения электрона под действием внешнего напряжения:

$$\frac{m_e \cdot \mathcal{V}^2}{2} = eU, \qquad (28)$$

где $\mathcal{V}$ -скорость направленного движения электрона под действием внешнего напряжения. Найдем ее

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{2e\mathrm{U}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 220}{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-34}}} = 2{,}77 \cdot 10^8\, \grave{\imath} \;/\, \tilde{n}.$$

Такая скорость очень близка к скорости света и, следовательно, электрон с такой большой скоростью ударяется об ионы кристаллической решетки и при резком торможении, как известно, излучает электромагнитные волны [2]. Поток фотонов таких электромагнитных волн и представляет электрический ток в проводниках .Согласно формуле (28), скорость электрона зависит только от значения приложенного напряжения U и не зависит от природы проводника.

Выводы:

1.Получены коэффициенты переноса электронного газа в металлах по классической и квантовой теориям.

2. Анализирован закон Видемана-Франца с точки зрений классической и квантовой теорий и установлены несоответствия теорий с законом Видемана-Франца.

3. Установлено, что в теплопроводности в основном участвуют фотоны теплового излучения, а не поток электронов в металле.

4. Доказано, что электрический ток –это поток фотонов электромагнитных излучений, образованных при торможении ускоренных электронов ионами кристаллической решетки металла.

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики, М:, Наука, 1980, тт$1 \div 3$.
2. Асанбаева Д.А. Решеточная модель ядра и атома. Бишкек: технология, 2000, 77 стр.