

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОМУ ОПЕРАТОРУ

Бул илимий иште n- ченемдүү сферада полигармоникалык операторго тиешелүү болгон спектрдик ажыралуунун бир калыпта жыйналуучулук маселеси үйрөнүлдү. Бул Лаплас оператору үчүн алынган жыйынтыктарга жалпылоочу катары кароо менен учурда актуалду маселе болуп эсептелет. Ошондой эле арадагы класстардын жылмакайлыгы да каралды. Андыктан полигармоникалык оператордун өздүк функциясынын орточо маанисинин формуласы кенен колдонулат.

Данная работа посвящена изучению вопросов равномерной сходимости спектральных разложений, соответствующих полигармоническому оператору. Данная проблема является актуальным с точки зрения обобщения результатов полученных для оператора Лапласа, а также рассмотрения промежуточных классов гладкости. При этом широко используется формула среднего значения для собственных функций полигармонического оператора. Кроме того, мы последуем методам, предложенным Алимовым.

This work is dedicated to the study of questions of the uniform convergence of the spectral expansions, which correspond to polyharmonic operator. This problem is immediate from the point of view of the generalization of the results of those obtained for the operator of Laplace, and also examination of the intermediate classes of smoothness. In this case the formula of average value for the eigenfunctions of polyharmonic operator widely is used. Furthermore, we will follow methods by Alimov proposed.

1. Введение

Обозначим через Ω подобласть в R^N , с гладкой границей $\partial\Omega$. Для любого положительного целого m , полигармонический оператор определяется следующим образом:

$$\Delta^m u(x) = \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) u(x), u(x) \in C_0^\infty(\Omega)$$

где $C_0^\infty(\Omega)$ обозначает класс бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем.

Через A обозначим самосопряженное расширение полигармонического оператора Δ^m в $L_2(\Omega)$, для которой существует счетная система ортонормированных в $L_2(\Omega)$ собственных функций $\{U_n(x)\}$ и собственных значений $\lambda_n > \mu > 0$. Спектральное разложение любого элемента $f \in L_2(\Omega)$ определяется посредством равенства

$$E_\lambda f(x) = \sum_{\lambda_n < \lambda} f_n U_n(x)$$

где $f_n = (f, U_n)$, а средние Рисса спектрального разложения порядка s

$$E_\lambda^s f(x) = \int_0^\lambda \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^s dE_t f.$$

В настоящей работе изучаются спектральные разложения $E_\lambda f$ и их средние Рисса $E_\lambda^s f$ функций, принадлежащих пространству Соболева $W_p^l(\Omega)$. Будем говорить, что определенная в области Ω функция принадлежит классу Соболева $W_p^l(\Omega)$ при целом $l > 0, p \geq 1$, если конечна норма

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=l} \|\partial^\alpha f(x)\|_{L_p(\Omega)}$$

$$\text{Здесь } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \text{ - мультииндекс, } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N, \quad \partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

Символом $W_p^l(\Omega)$ обозначим класс функций, принадлежащих $W_p^l(\Omega)$ и имеющих компактный носитель в $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$. Для полной информации о классах Соболева см. /14/.

Достаточным условиям равномерной на любом компакте $K \subset \Omega$ сходимости $E_\lambda^s f$ к функции f , принадлежащей $W_p^l(\Omega)$, является выполнение при $p \geq 1, s \geq 0, l > 0$ следующих условий:

$$l + s \geq \frac{N-1}{2}, \quad lp > N.$$

Эти условия были впервые найдены в работах В.А.Ильина /3/ при $s = 0$, и в работе Ш.А.Алимова и В.А.Ильина /5/ при $s > 0$. Отметим, что в работе /3/ равномерная сходимость $E_\lambda^s f$ при выполнении условий (1) установлена не только в классах Соболева $W_p^l(\Omega)$, но и в более широких классах Никольского $H_p^l(\Omega)$, причем в последнем случае показатель $l > 0$ может принимать любые (не обязательно целые) значения.

Кроме того, В.А.Ильиным доказано /3/, что условия равномерной сходимости (1) являются окончательными. Именно, если $l + s \geq \frac{N-1}{2}$, то существует функция, имеющая в Ω все непрерывные частные производные до порядка l включительно, для которой средние $E_\lambda^s f$ неограниченны в некоторой точке. Что же касается условия $pl > N$, то выполнение противоположного неравенства $pl \leq N$ допускает существование неограниченной функции

$f \in W_p^l(\Omega)$, средние Рисса которой заведомо не могут сходиться к ней равномерно, поскольку разлагаемая функция не является непрерывной.

Случай $pl \leq N$ при дополнительном требовании непрерывности разлагаемой функции изучался впервые в работе Ш.А.Алимова /1/ для оператора Лапласа. В этой работе доказано, что достаточным условием равномерной на любом компакте $K \subset \Omega$ сходимости $E_\lambda^s f(x)$ к непрерывной финитной функции f , принадлежащей классу Соболева $W_p^l(\Omega)$ при $l > 0, p \geq 1, s \geq 0$, является выполнение следующих условий:

$$l + s \geq \frac{N-1}{2}, \quad lp = N$$

Кроме того, Ш.А.Алимовым /2/ доказано, что условие $l + s \geq \frac{N-1}{2}$ является существенным. Именно, если

$$l + s \geq \frac{N-1}{2}, \quad lp = N,$$

то существует непрерывная функция f из класса $W_p^l(\Omega)$ такая, что $E_\lambda^s f(x_0)$ не ограничены в некоторой точке $x_0 \in \Omega$. Аналогичные результаты в классах Никольского установила Н.Н.Козлова /13/. В данной работе изучается справедливость условий (1) и (2) для полигармонического оператора, точнее доказываются следующие теоремы:

Теорема 1 (Достаточные условия для равномерной сходимости)

Пусть Ω обозначает открытое подмножество R^N и числа $s \geq 0, p \geq 1, a > 0$ удовлетворяют следующим условиям

$$a + s \geq \frac{N-1}{2}, \quad ap > N.$$

Тогда для любой функции $f \in W_p^a(\Omega)$, непрерывной в $\overline{\Omega}$ имеет место равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda^s f(x) = f(x)$$

равномерно на $\overline{\Omega}$.

Теорема 2 (Необходимые условия для равномерной сходимости)

Если числа $s \geq 0, p \geq 1, a > 0$ удовлетворяют условиям

$$a + s \geq \frac{N-1}{2}, \quad ap < N$$

тогда для любой точки $x_0 \in R^N$ существует непрерывная функция $f \in W_p^a(\Omega)$ такая, что имеет

место следующее равенство
$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda^s f(x_0) = +\infty$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alimov, Sh. A., On expanding continuous functions from Sobolev classes in eigenfunctions of Laplace operator, Sib. Math. J. 19, (1979), P. 507-517
2. Алимов Ш.А. Равномерная сходимость и суммируемость спектральных разложений функций из L_p^a //Дифф. уравнения 9:4 (1973), 669-681.
3. Ильин В.А. О равномерной сходимости разложений по собственным функциям при суммировании в порядке возрастания собственных чисел //ДАН 114:4 (1957), 698-701.
4. Ильин В.А. О равномерной сходимости разложений по собственным функциям во всей замкнутой области //Матем. сб. 45:2 (1958), 195-232.
5. Ильин В.А., Алимов Ш.А. Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов, I, II, Дифф. уравнения 7:4 (1971), 670-710; 7:5 (1971), 851-882.
6. Ильин В.А., Алимов Ш.А. О расходимости на множестве положительной меры средних Рисса ядер дробного порядка //Дифф. уравнения 8:2 (1972), 372-373.
7. Ильин В.А., Алимов Ш.А. Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов, V //Дифф. уравнения 10:3 (1974).
8. Ильин В.А., Моисеев Е.И. О спектральных разложениях, отвечающих произвольному неотрицательному расширению общего самосопряженного эллиптического оператора второго порядка //ДАН 191:4 (1971), 770-772.
9. Ильин В.А., Шишмарев И.А. Ряды Фурье по фундаментальным системам функций полигармонического оператора //ДАН 189:4 (1969), 707-709.
10. Alimov, Sh.A., Ashurov, A.A., Pulatov, A. K., I. Multiple Fourier Series and Fourier Integrals, Commutative Harmonic Analysis, vol. IV, pp. 1-97. Springer, Berlin (1992)
11. Ashurov, R.R., On the multiple fourier integrals of continuous functions from the sobolev spaces, Proceedings of the "Advanced Technology International Congress 2009
12. Ashurov, R.R., Butaev, A., On the Pinsky Phenomenon, Journal of Fourier Analysis and Application, (2009), www.springerlink.com
13. Kozlova, N.N., Riesz summability of continuous functions from Nikol'skii classes, Differents. Uravnen., 20, No. 1, (1984), pp.4656
14. Nikolskii, S.M., Priblizhenie funktsii-mnogikh peremennykh i teoremy viozheniya (Approximation of functions of several variables and embedding theorems), Nauka, Moscow 1969