УДК 517.968

Ч.С.ЖУНУСОВА, К.К.КАКИШОВ

E-mail: ksucta@elcat.kg.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Бул эмгекте асимптотикалык методдордун өтө сызыктуу эмес көп параметрлүү дифференциалдык тендемелер системасында колдонулушу каралган.

В данной работе рассматривается применение асимптотических методов в слабо нелинейных системах дифференциальных уравнений со многими малыми параметрами при производных.

In the given work application of asymptotic methods in poorly nonlinear systems of the differential equations with many small parameters is considered at derivatives.

Исследование почти периодических (п.п.) решений /1/ с одним малым параметром рассмотрено в /2/. Периодические решения в гидродинамике вызваны второй вязкостью, боковой волной и каустикой /3/, явлениями с отрицательной вязкостью и дисперсией /1/ и левыми средами /3/. Учет большего числа малых параметров обусловлен несколькими процессами релаксации во второй вязкости, которые, в свою очередь, обуславливают появление такого же числа почти периодических решений на собственных частотах в некотором интервале /3/. Огибающая семейства боковых волн является каустической кривой и определяется уравнением каустики, в которой каждая из боковых волн имеет собственную частоту /4/, что вызывает интерес к изучению нелинейных систем со многими параметрами.

Изучение почти периодических решений с большим числом собственных частот диктуется практическими задачами дистанционного зондирования, исследования слоев ионосферы (эффект Гетманцева) /1, 3/, физических полей человека, диагностики и терапии рака /4/. Эффекту Гетманцева сопутствует ряд частот в интервале от 0,5-10 КГц до 10 Гц и менее. В электромагнитной терапии резонансными частотами являются 50,3 и 51,8; 64,5 и 65,5; 95 и 105 ГГц. Проблема фазовых переходов и слабо нелинейные явления являются магистральными направлениями физики /3/.

Волнам сжатия соответствуют неустойчивые колебания, но устойчивые колебания возникают в волнах разрежения /3/. Тесная связь происхождения жизни вблизи критической точки /4/ с оптической активностью /3/, полученная для фазового перехода 3 рода, является путем решения проблемы Пастера /3/. Фазовый переход 3 рода вблизи критической точки как точки перегиба описывается системой 3-х нелинейных дифференциальных уравнений с 3-мя неизвестными. По мере приближения к точке перегиба, т.е. к критической точке, члены системы уравнений с четными производными 2 и 4 порядка стремятся к нулю, поэтому рассматриваются как два малых параметра. Помимо указанных практических приложений, системы 3-х нелинейных дифференциальных уравнений с 3-мя неизвестными имеют место при изучении магнитного поля, так как силовые линии магнитного поля описываются поверхностями 3-го порядка /4/. Сферическое поле устойчиво и не меняет знака. Только поверхности 3-го порядка способны изменить полярность магнитного поля, так как удовлетворяют условию генерации магнитного поля /3/, что доказано на примере листа Мебиуса и бутылки Клейна. Односторонние поверхности в разрезе представляют овал Кассини, и это нашло применение в терапии рака, трансформации замкнутой поверхности термодинамики в открытую, биологических мембранах /4/. Наличие колебаний, по меньшей мере, с парой собственных частот в рассматриваемых средах, в эксгаляции радона и вблизи фазового перехода 3-го рода, уже приводит к изучению нелинейных систем с двумя малыми параметрами /1/. Большее количество малых параметров определяется малостью погрешности измерений, кривизны пространства и доплеровского уширения /3/. Решению таких нелинейных систем посвящена настоящая работа.

Рассмотрим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon_1(a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u + b_1(x)) + \varepsilon_1^{\,2} f_1(x,y,z,u);$$
$$\varepsilon_1 \frac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u + b_2(x) + \varepsilon_1 f_2(x,y,z,u);$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u + b_3(x) + \varepsilon_1 f_3(x,y,z,u) + \varepsilon_1\varepsilon_2 f_4(x,y,z,u) + \varepsilon_2 f_5(x,y,z,u),$$

(1)

где ε_1, ε_2 – малые положительные параметры, удовлетворяющие неравенству $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 << 1$; a_{ij} ($i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$) – некоторые положительные постоянные; $b_i(x)$ ($i = \overline{1,3}$) – скалярные п.п.-функции; $f_k(x,y,z,u)$ ($k = \overline{1,5}$) – непрерывные функции в области $P\{-\infty < x,y,z,u < \infty\}$. Считая, что $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0,$ из (1) получим вырожденную систему

$$\frac{d\upsilon}{dx} = 0,$$
$$a_{21}\upsilon + a_{22}w + a_{23}\rho + b_2(x) = 0, \qquad (2)$$
$$a_{31}\upsilon + a_{32}w + a_{33}\rho + b_3(x) = 0.$$

Предполагается, что вырожденная система (2) имеет решение в виде:

$$\upsilon(x) = c,$$
$$w(x) = -b_{22}^{\;-1}(\overline{b_2}(x) + b_{21}c),$$
$$\rho(x) = -a_{33}^{\;-1}(\overline{b_3}(x) + b_{31}c), \qquad (3)$$

где $\overline{b_2}(x) = b_2(x) - a_{23}a_{33}^{-1}b_3(x)$, $\overline{b_3}(x) = b_3(x) - a_{32}b_{22}^{-1}\overline{b_2}(x)$, b_{21}, b_{31} – известные п.п. функции по определению /27, 28/, которое применяется в дальнейших обозначениях. При этом выполняется условие $a_{33} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$.

Формальные п.п. решения системы (1) ищем в виде ряда

$$y(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = v(x) + \sum_{k+j=1}^{\infty} v_{kj}\varepsilon_1^k\varepsilon_2^j,$$

$$z(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = w(x) + \sum_{k+j=1}^{\infty} w_{kj}\varepsilon_1^k\varepsilon_2^j,$$

$$u(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \rho(x) + \sum_{k+j=1}^{\infty} \rho_{kj}\varepsilon_1^k\varepsilon_2^j, \tag{4}$$

где v_{kj}, w_{kj}, ρ_{kj} – пока неизвестные п.п.-функции. Подстановка (1) в (2) и разложение функции

$$f_i\left(x, v(x) + \sum_{k+j=1}^{\infty} v_{kj}\varepsilon_1^k\varepsilon_2^j,\ w(x) + \sum_{k+j=1}^{\infty} w_{kj}\varepsilon_1^k\varepsilon_2^j,\ \rho(x) + \sum_{k+j=1}^{\infty} \rho_{kj}\varepsilon_1^k\varepsilon_2^j\right), \qquad \left(i = \overline{1,3}\right)$$

в ряд Тейлора в окрестности множества точек (x, $v(x)$, $w(x)$, $\rho(x)$) по степеням малого параметра, после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε_1, ε_2, $\varepsilon_1\varepsilon_2$, …, дает систему линейных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\upsilon_{10}}{dx} = a_{11}c + a_{12}w(x) + a_{13}\rho(x) + b_1(x),\\
&\omega' = a_{21}\upsilon_{10}(x) + a_{22}w_{10}(x) + a_{23}\rho_{10}(x) + f_2(x,c,w,\rho),\\
&0 = a_{31}\upsilon_{10}(x) + a_{32}w_{10}(x) + a_{33}\rho_{10}(x) + f_3(x,c,w,\rho),
\end{aligned} \tag{5_{10}}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\upsilon_{01}}{dx} = 0,\\
&0 = a_{21}\upsilon_{01} + a_{22}w_{01} + a_{23}\rho_{01},\\
&0 = a_{31}\upsilon_{01} + a_{32}w_{01} + a_{33}\rho_{01} + f_5(x,c,w,\rho),
\end{aligned} \tag{5_{01}}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\upsilon_{11}}{dx} = a_{11}\upsilon_{01} + a_{12}w_{01} + a_{13}\rho_{01},\\
&\frac{dw_{01}}{dx} = a_{21}\upsilon_{11} + a_{22}w_{11} + a_{23}\rho_{11} + f_{2y}'\upsilon_{01} + f_{2z}'w_{01} + f_{2u}'\rho_{01},\\
&\rho' = a_{31}\upsilon_{11} + a_{32}w_{11} + a_{33}\rho_{11} + f_{3y}'\upsilon_{01} + f_{3z}'w_{01} + f_{3u}'\rho_{01} +\\
&+ f_4(x,\upsilon,w,\rho) + f_{5y}'\upsilon_{10} + f_{5z}'w_{10} + f_{5u}'\rho_{10},
\end{aligned} \tag{5_{11}}$$

$$\frac{d\upsilon_{ij}}{dx} = a_{11}\upsilon_{i-1,j} + a_{12}w_{i-1,j} + a_{13}\rho_{i-1,j} + f_{1y}{}'\upsilon_{i-2,j} + f_{1z}{}'w_{i-2,j} + f_{1u}{}'\rho_{i-2,j},$$

$$\frac{dw_{i-1,j}}{dx} = a_{21}\upsilon_{ij} + a_{22}w_{ij} + a_{23}\rho_{ij} + f_{2y}{}'\upsilon_{i-1,j} + f_{2z}{}'w_{i-1,j} + f_{2u}{}'\rho_{i-1,j},$$

$$\frac{d\rho_{i-1,j-1}}{dx} = a_{31}\upsilon_{ij} + a_{32}w_{ij} + a_{33}\rho_{ij} + f_{3y}{}'\upsilon_{i-1,j} + f_{3z}{}'w_{i-1,j} + f_{3u}{}'\rho_{i-1,j} +$$

$$+ f_{4y}{}'\upsilon_{i-1,j-1} + f_{4z}{}'w_{i-1,j-1} + f_{4u}{}'\rho_{i-1,j-1} + f_{5y}{}'\upsilon_{i,j-1} + f_{5z}{}'w_{i,j-1} + f_{5u}{}'\rho_{i,j-1},$$

$$(i = 1,2,\ldots k; \quad j = 1,2,\ldots k)$$

(5_{ij})

где $F_{k,ij}\left(x, v, w, \rho, v_{i-1,j-1}, w_{i-1,j-1}, \rho_{i-1,j-1}\right)$ – известные п.п.-функции.

Исследуем п.п.-решения системы линейных дифференциальных уравнений (5_{ij}). Для этого из первого уравнения (5_{10}), учитывая почти периодичность вектора $\upsilon_{10}(x)$, формулу (3) и обозначения из /5, 6/, получаем

$$\upsilon_{10}(x) = c_{10} + \int_0^x \left[a_{11}c - a_{12}b_{22}{}^{-1}(\overline{b_2}(s) + b_{21}c) - a_{13}a_{33}{}^{-1}(\overline{b_3}(s) + b_{31}c) + b_1(s)\right]ds =$$

$$= c_{10} + \alpha_{10}(x),$$

(6)

где $\alpha_{10}(x) = \int_0^x \left[a_{11}c - a_{12}b_{22}{}^{-1}(\overline{b_2}(s) + b_{21}c) - a_{13}a_{33}{}^{-1}(\overline{b_3}(s) + b_{31}c) + b_1(s)\right]ds$ – известная функция, но c_{10} – пока неизвестная константа. Алгебраическое уравнение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \left[a_{11}c - a_{12}b_{22}{}^{-1}(\overline{b_2}(s) + b_{21}c) - a_{13}a_{33}{}^{-1}(\overline{b_3}(s) + b_{31}c) + b_1(s)\right]ds = 0$$

имеет решение

$$c = \Delta^{-1}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \left[a_{12}b_{22}{}^{-1}\overline{b_2}(s) + a_{13}a_{33}{}^{-1}\overline{b_3}(s) - b_1(s)\right]ds \equiv c_0\ ,$$

(7)

где $\Delta = (a_{11} - a_{12}b_{22}^{-1}b_{21} - a_{13}a_{33}^{-1}b_{31}) \neq 0$. Подставляя значение $\upsilon_{10}(x)$ во второе и третье уравнения системы (5_{10}), находим решения системы линейных алгебраических уравнений относительно $w_{10}(x)$ и $\rho_{10}(x)$.

Таким образом, решение системы (5_{10}) представляется в виде:

$$\upsilon_{10}(x) = c_{10} + \alpha_{10}(x),$$

$$w_{10}(x) = -b_{22}{}^{-1}(g_{2,10}(x) + b_{21}(c_{10} + \alpha_{10})), \qquad (8)$$

$$\rho_{10}(x) = -a_{33}{}^{-1}(g_{3,10}(x) + b_{31}(c_{10} + \alpha_{10})),$$

где $\alpha_{10}(x), g_{2,10}(x), g_{3,10}(x)$ – известные п.п.-функции. Неизвестная c_{10} определяется из условия п.п.-вектора $\upsilon_{20}(x)$ системы (5_{20}). А именно

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \Big\{a_{11}(c_{10}+\alpha_{10}(s)) - a_{12}b_{22}^{-1}\left[g_{2,10}(s)+b_{21}(c_{10}+\alpha_{10}(s))\right] - \\ - a_{13}a_{33}^{-1}\left[g_{3,10}(s)+b_{31}(c_{10}+\alpha_{10}(s))\right] + f_1(s,c,w,\rho)\Big\}ds = 0 \tag{9}$$

имеет решение

$$c_{10} = \Delta^{-1}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \Big\{a_{12}b_{22}^{-1}\left[g_{2,10}(s)+b_{21}\alpha_{10}(s)\right] + \\ + a_{13}a_{33}^{-1}\left[g_{3,10}(s)+b_{31}\alpha_{10}(s)\right] - f_1(s,c_0,w,\rho) - \Delta\alpha_{10}(s)\Big\}ds = c_{10}^0$$

Таким образом, найдена неизвестная константа $c_{10} = c_{10}{}^0$. Подставляя c_{10} в (8), находим п.п.-функции $\upsilon_{10}(x), w_{10}(x), \rho_{10}(x)$.

Исследуем остальные системы дифференциальных уравнений (5_{ij}). Найдем решение системы (5_{01}). Для этого из первого уравнения (5_{01}) получаем, что $\upsilon_{01}(x) = c_{01}$, где c_{01} – пока неизвестная константа. Подставляя значение $\upsilon_{01}(x) = c_{01}$ во второе и третье уравнения системы (5_{01}), получаем систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$a_{21}c_{01} + a_{22}w_{01} + a_{23}\rho_{01} = 0, \\ a_{31}c_{01} + a_{32}w_{01} + a_{33}\rho_{01} + f_5\ (x,c,w,\rho) = 0. \tag{10}$$

Из второго уравнения (10) имеем

$$\rho_{01}(x) = -a_{33}{}^{-1}(a_{31}c_{01} + a_{32}w_{01}(x)) - a_{33}^{-1}f_5\ (x,c,w,\rho).$$

(11)

Подставляя значение (11) в первое уравнение (10), согласно обозначениям /5, 6/ имеем

$$b_{21}c_{01} + b_{22}w_{01}(x) - a_{23}a_{33}^{-1}f_5\ (x,c,w,\rho) = 0.$$

Отсюда получаем

$$w_{01}(x) = -b_{22}{}^{-1}(g_{2,01}(x) + b_{21}c_{01}),$$

(12)

где $g_{2,01}(x) = a_{23}a_{33}^{-1}f_5\ (\tilde{o},\tilde{n},w,\rho)$. Подставляя (12) в (11) и используя обозначения из /5,6/, получим решение системы (5_{01}):

$$\upsilon_{01}(x) = c_{01},$$

$$w_{01}(x) = -b_{22}{}^{-1}b_{21}c_{01},$$

$$\rho_{01}(x) = -a_{33}{}^{-1}b_{31}c_{01}, \tag{13}$$

где c_{01} – новая произвольная постоянная, которая определяется по условию почти периодичности вектора $\upsilon_{11}(x)$ из системы (5_{11}). А именно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x (a_{11}c_{01}+a_{12}w_{01}+a_{13}\rho_{01})ds=0. \qquad (14)$$

С учетом условия (7), подставляя в (14) значения функций $\upsilon_{01}(x)$, $w_{01}(x)$, ρ_{01} (x), из (14) получим

$$c_{01}=\Delta^{-1}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x (a_{12}b_{22}^{-1}g_{2,01}(s)+a_{13}a_{33}{}^{-1}g_{3,01}(s))ds\equiv c_{01}^0.$$

Продолжая этот процесс, находим все п.п.-решения системы линейных дифференциальных уравнений (5_{ij}) в виде

$$\upsilon_{ij}(x)=c_{ij}+\alpha_{ij}(x),$$
$$w_{ij}(x)=-b_{22}{}^{-1}\left[g_{2,ij}(x)+b_{21}\upsilon_{ij}(x)\right],$$
$$\rho_{ij}(x)=-a_{33}{}^{-1}\left[g_{3,ij}(x)+b_{31}\upsilon_{ij}(x)\right] \qquad (15)$$

где $\alpha_{ij}(x)$ – известная п.п.-функция, которая определяется из первого уравнения системы линейных дифференциальных уравнений (5_{ij}); $g_{2,ij}(x)$ – известная п.п.-функция, которая получается из второго уравнения системы (5_{ij}); $g_{3,ij}(x)$ – известная п.п.-функция, получаемая из третьего уравнения системы (5_{ij}); c_{ij} – новая константа, которая определяется из условия п.п.-вектора $\upsilon_{i+1,j}(x)$. А именно, из первого уравнения системы линейных дифференциальных уравнений ($5_{i+1,j}$) получаем алгебраическое уравнение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \Big\{a_{11}(c_{ij}-\alpha_{ij}(s))-a_{12}b_{22}{}^{-1}\left[g_{2,ij}(s)+b_{21}(c_{ij}+\alpha_{ij}(s))\right]-a_{13}a_{33}{}^{-1}\left[g_{3,ij}(s)+b_{31}(c_{ij}+\alpha_{ij}(s))\right]+$$
$$+f_{1y}{}'(M_0)\upsilon_{i-1,j}(s)+f_{1z}{}'(M_0)w_{i-1,j}(s)+f_{1u}{}'(M_0)\rho_{i-1,j}(s)\Big\}ds=0.$$

Учитывая условие (7), находим решение алгебраического уравнения

$$c_{ij}=\Delta^{-1}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \Big\{a_{12}b_{22}{}^{-1}g_{2,ij}(s)-a_{13}a_{33}{}^{-1}g_{3,ij}(s)+f_{1y}{}'(M_0)(c_{ij}-\alpha_{ij}(s))-$$
$$-f_{1z}{}'(M_0)b_{22}{}^{-1}\left[g_{2,(i-1)j}(s)+b_{21}(c_{i-1,j}+\alpha_{i-1,j}(s))\right]-$$
$$-f_{1u}{}'(M_0)a_{33}{}^{-1}\left[g_{3,(i-1)j}(s)+b_{31}(c_{i-1,j}+\alpha_{i-1,j}(s))\right]+\Delta\alpha_{ij}(s)\Big\}ds=c_{ij}^0.$$

Подставляя c_{ij} в (15), находим все п.п.-решения $\upsilon_{ij}(x), w_{ij}(x), \rho_{ij}(x)$ системы линейных дифференциальных уравнений (5_{ij}). Продолжая этот процесс, находим все п.п.-решения системы уравнений (5_{ij}).

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть: 1) $a_{i,j}\,(i=\overline{1,3};\, j=\overline{1,3})$ – некоторые положительные постоянные, $b_i(x)\,(\,i=\overline{1,3}\,)$ – скалярные п.п.- функции, $f_k(x,y,z,u)\;(k=\overline{1,5})$ – непрерывные функции в области $P\{-\infty<x,y,z,u<\infty\}$;

2) $a_{33}\neq 0$, $b_{22}\neq 0$;

3) Предполагается, что вырожденная система (2) имеет решение в виде (3), где $\overline{b_2}(x) = b_2(x) - a_{23}a_{33}^{-1}b_3(x)$, $\overline{b_3}(x) = b_3(x) - a_{32}b_{22}^{-1}\overline{b_2}(x)$, b_{21}, b_{31} – известные п.п.-функции, по определению /5, 6/.

Тогда система нелинейных дифференциальных уравнений (1) имеет единственное почти периодическое решение

$$y(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = v + v_{10}\varepsilon_1 + v_{01}\varepsilon_2 + v_{11}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1^2\xi_0 + \varepsilon_1^2\varepsilon_2\xi_1 + \varepsilon_2^2\xi_2,$$

$$z(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = w + w_{10}\varepsilon_1 + w_{01}\varepsilon_1 + w_{11}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1^2\eta_0 + \varepsilon_1^2\varepsilon_2\eta_1 + \varepsilon_2^2\eta_2,$$

(16)

$$\grave{e}(x,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \rho + \rho_{10}\varepsilon_1 + \rho_{01}\varepsilon_2 + \rho_{11}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1^2\varsigma_0 + \varepsilon_1^2\varepsilon_2\varsigma_1 + \varepsilon_2^2\varsigma_2.$$

Причем, при всех x и $\varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0$ это п.п.-решение сходится к вполне определенному п.п.-решению соответствующей вырожденной системы (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович Б.П. Лекции по теории математической устойчивости. – М., 1967.
2. Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе: Илим, 1974.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 736 С.
4. Гуляев Ю.В. Физические поля и излучения: новые методы ранней диагностики // Биомединцинская радиоэлектроника. – 2001. – № 12. – С. 3-10.
5. Жунусова Ч.С. Ограниченные и почти периодические решения нелинейных сингулярно-возмущенных дифференциальных систем // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Вып. 29. – Бишкек: Илим, 2000. – С. 234-240.
6. Жунусова Ч.С. Оценка остаточных членов ограниченных и почти периодических решений сингулярно-возмущенных нелинейных систем уравнений со многими малыми параметрами при производных // Там же. – С. 241-245.