

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬЕСА 1 РОДА С ПОЛЯРНЫМ ЯДРОМ

Бул статьяда Вольтера-Стилтьестин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемеси каралган. Регуляризациялоочу оператору түзүлүп, теңдеменин чыгарылышынын жалгыздыгы далилденген.

В данной статье рассматривается интегральное уравнение Вольтерра-Стилтьеса первого рода. Построен регуляризующий оператор и доказана теорема о единственности решения интегрального уравнения Вольтерра-Стилтьеса первого рода с полярным ядром.

In given to article equation Volterra-Stiltesa of the first sort is considered integrated. The operator is constructed регуляризующий and the theorem of uniqueness of the decision of integrated equation Volterra-Stilesa of the first sort with a polar kernel is proved.

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$(Ku)(t) = \int_0^t \frac{K(t,s)u(s)d\varphi(s)}{(t-s)^\alpha} = f(t), \quad (1)$$

где $\alpha \in (0,1)$, $t \in [0,T]$, $K(t,s)$, $f(t)$, $\varphi(t)$ – известные функции, причем $\varphi(t)$ – строго возрастающая, непрерывна функция на $[0,T]$, $u(t)$ – искомая функция.

Лемма 1. Пусть $g(t,s)$ – непрерывна по второму аргументу и существует интеграл $\int_0^t ds \int_0^s g(s,\tau) d\varphi(\tau)$, тогда существует интеграл $\int_0^t d\varphi(\tau) \int_\tau^t g(s,\tau) ds$, и они равны между собой.

Доказательство. Обозначив через $u(t)$ и $v(t)$ соответственно первый и второй интегралы и дифференцируя $u(t)$ по t , получим $u'(t) = \int_0^t g(t,\tau)d\varphi(\tau)$. Для второго интеграла оценим разность

$$\left| \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} - u'(t) \right| \leq \left| \int_0^t d\varphi(\tau) \left(\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} g(s,\tau) ds - g(t,\tau) \right) \right| + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} d\varphi(\tau) \left| \int_\tau^{t+\Delta t} g(t,\tau) ds \right|. \quad \text{Для}$$

второго слагаемого, используя теорему о среднем, получим оценку сверху;

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} d\varphi(\tau) \left| \int_\tau^{t+\Delta t} g(t,\tau) ds \right| \leq \int_t^{t+\Delta t} g(s^*,\tau) d\varphi(\tau), \quad \text{где } s^* \in [\tau, t+\Delta t] \quad t \leq \tau \leq s \leq t+\Delta t.$$

Из-за ограниченности функции $g(t,s)$ последний интеграл не превышает величину $\max_{\tau \in [t, t+\Delta t]} |g(s^*, \tau)| |\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)|$, откуда силу непрерывности φ , устремляя Δt к нулю, получаем $|v'(t) - u'(t)| = 0$, т.е. $u(t) - v(t) = \text{const}$. Но $u(0) - v(0) = 0$, и поэтому $u(t) = v(t)$. Откуда следует требуемое.

Действуя оператором $J^\alpha v \equiv \int_0^t \frac{v(s) ds}{(t-s)^{1-\alpha}}$ в формуле (1), используя лемму 1, имеем

$$J^\alpha (Ku)(t) = \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}} \left(\int_0^s \frac{K(s, \tau) u(\tau) d\varphi(\tau)}{(s-\tau)^\alpha} \right) ds = \bar{f}(t),$$

где $\bar{f}(t) = \int_0^t \frac{f(s) ds}{(t-s)^\alpha}$. После применения обобщенной формулы Дирихле получим

$$(J^\alpha (Ku))(t) = \int_0^t u(\tau) \left(\int_\tau^t \frac{K(s, \tau) ds}{(t-s)^{1-\alpha} (s-\tau)^\alpha} \right) d\varphi(\tau).$$

Сделав замену $s = \tau + \theta(t - \tau)$, получаем

$$J^\alpha Ku(t) = \int_0^t \bar{K}(t, \tau) u(\tau) d\varphi(\tau) = \bar{f}(t),$$

(2)

где

$$\bar{K}(t, s) = \int_0^1 \frac{K(s + \theta(t-s), s)}{(1-\theta)^{1-\alpha} \theta^\alpha} d\theta.$$

(3)

Так как $\text{Im } K \subset \text{Dom } J^\alpha$ и $\text{Ker } J^\alpha = 0$, то решение уравнения (1) является решением и для (2), и наоборот, т.е. уравнения (1) и (2) эквивалентны.

Наряду с уравнением (2) рассмотрим уравнение

$$\varepsilon v(t, \varepsilon) + \int_0^t \bar{K}(t, s) v(s, \varepsilon) d\varphi(s) = \bar{f}(t) + \varepsilon u(0),$$

(4)

$\varepsilon > 0$ – малый параметр. Сделав замену $v(t, \varepsilon) = u(t) + z(t, \varepsilon)$, где $u(t)$ – решение уравнения (2), из (4) получим

$$\varepsilon z(t, \varepsilon) + \int_0^t \bar{K}(t, s) z(s, \varepsilon) d\varphi(s) = -\varepsilon (u(t) - u(0)).$$

(5)

Уравнение (5) запишем в виде:

$$\begin{aligned}
z(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \bar{K}(s, s) z(s, \varepsilon) d\varphi(s) = \\
= -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (\bar{K}(t, s) - \bar{K}(s, s)) z(s, \varepsilon) d\varphi(s) - (u(t) - u(0))
\end{aligned}$$

Используя резольвенту ядра $\frac{\bar{K}(s, s)}{\varepsilon}$, которая равна

$$\frac{\bar{K}(s, s)}{\varepsilon} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau) \right\}, \text{ получим}$$

$$\begin{aligned}
z(t, \varepsilon) = & -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (\bar{K}(t, s) - \bar{K}(s, s)) z(s, \varepsilon) d\varphi(s) - (u(t) - u(0)) + \\
& + \int_0^t \left\{ -\frac{\bar{K}(s, s)}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} \times \right. \\
& \times \left. \left[-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (\bar{K}(s, v) - \bar{K}(v, v)) z(v, \varepsilon) d\varphi(v) - (u(s) - u(0)) \right] \right\} d\varphi(s)
\end{aligned}$$

Применив обобщенную формулу Дирихле [2], отсюда получаем

$$\begin{aligned}
z(t, \varepsilon) = & -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (\bar{K}(t, s) - \bar{K}(s, s)) z(s, \varepsilon) d\varphi(s) - (u(t) - u(0)) - \\
& - \int_0^t \frac{\bar{K}(s, s)}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} (u(s) - u(0)) d\varphi(s) + \\
& + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t z(v, \varepsilon) d\varphi(v) \int_v^t \bar{K}(s, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} (\bar{K}(s, v) - \bar{K}(v, v)) d\varphi(s)
\end{aligned}$$

т.е.

$$z(t, \varepsilon) = \int_0^t H(t, s, \varepsilon) z(s, \varepsilon) d\varphi(s) + \psi(t, \varepsilon), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}
H(t, s, \varepsilon) = & -\frac{1}{\varepsilon} (\bar{K}(t, s) - \bar{K}(s, s)) + \\
& + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_s^t \bar{K}(v, v) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_v^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} (\bar{K}(v, s) - \bar{K}(s, s)) d\varphi(v) \\
\psi(t, \varepsilon) = & -(u(t) - u(0)) - \int_0^t \frac{\bar{K}(s, s)}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} (u(s) - u(0)) d\varphi(s)
\end{aligned}$$

Так как

$$\int_s^t \bar{K}(v, v) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_v^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} (\bar{K}(t, s) - \bar{K}(s, s)) d\varphi(v) =$$

$$= \varepsilon (\bar{K}(t, s) - \bar{K}(s, s)) (1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)}),$$

то

$$\bar{K}(t, s) - \bar{K}(s, s) = \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \bar{K}(v, v) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_v^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} (\bar{K}(t, s) - \bar{K}(s, s)) d\varphi(v) +$$

$$+ (\bar{K}(t, s) - \bar{K}(s, s)) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)}$$

откуда

$$H(t, s, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_s^t \bar{K}(v, v) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_v^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} (\bar{K}(t, s) - \bar{K}(v, s)) d\varphi(v) -$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} (\bar{K}(t, s) - \bar{K}(s, s)) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} \quad (7)$$

Аналогично находим

$$\psi(t, \varepsilon) = - (u(t) - u(0)) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} -$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \bar{K}(s, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} (u(t) - u(s)) d\varphi(s) \quad (8)$$

Лемма 2. Из непрерывности $K(t, s)$ на $G = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$ следует непрерывность $\bar{K}(t, s)$.

Лемма 3. Пусть при всех $(t, \tau) \in G$, таких, что $t > \tau$, имеет место неравенство

$$|K(t, s) - K(\tau, s)| \leq l(s) \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\varphi(\tau) \text{ и при всех } \theta \in (0, 1)$$

$$\int_{\tau}^t K(s + \theta(t-s), s + \theta(t-s)) d\varphi(s + \theta(t-s)) \leq \int_{\tau}^t K(x, x) d\varphi(x).$$

Тогда $|\bar{K}(t, s) - \bar{K}(\tau, s)| \leq B(\alpha, 1 - \alpha) l(s) \int_{\tau}^t K(\tau, \tau) d\varphi(\tau)$, где B – бета-функция

Доказательство. Из формулы (3) и из условия леммы 3 получим

$$\begin{aligned}
& \left| \bar{K}(t, s) - \bar{K}(\tau, s) \right| \leq \int_0^1 \frac{\left| K(s + \theta(t-s), s) - K(s + \theta(\tau-s), s) \right| d\theta}{(1-\theta)^{1-\alpha} \theta^\alpha} \leq \\
& \leq \int_0^1 \frac{l(s) \int_{s+\theta(\tau-s)}^{s+\theta(t-s)} K(v, v) d\varphi(v)}{(1-\theta)^{1-\alpha} \theta^\alpha} d\theta = \\
& = l(s) \int_0^1 \frac{1}{(1-\theta)^{1-\alpha} \theta^\alpha} \left(\int_\tau^t K(s + \theta(t-s), s + \theta(t-s)) d\varphi(s + \theta(t-s)) \right) d\theta \leq \\
& \leq l(s) B(\alpha, 1-\alpha) \int_\tau^t K(x, x) d\varphi(x), \quad x \in [\tau, t].
\end{aligned}$$

Ясно, что $\bar{K}(t, t) = B(\alpha, 1-\alpha)K(t, t)$ и поэтому

$$\left| \bar{K}(t, s) - \bar{K}(\tau, s) \right| \leq l(s) \int_\tau^t \bar{K}(v, v) d\varphi(v).$$

Теперь введем величину $W_{\bar{u}}(h) = \sup_{|y-x| \leq h} |u(\varphi^{-1}(y)) - u(\varphi^{-1}(x))|$ и оценим $|\psi(t, s)|$.

Пусть $\varphi(0) = 0$. Отрезок $[0, T]$ представим в виде $[0, T] = [0, \varphi^{-1}(\varepsilon^\beta)] \cup [\varphi^{-1}(\varepsilon^\beta), T]$.

Пусть $t \in [0, \varphi^{-1}(\varepsilon^\beta)]$ тогда из (8) получим

$$|\psi(t, s)| \leq W_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t K(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} + W_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta) \int_0^t d_{\varphi(s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} = W_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta)$$

Пусть теперь $t \in [\varphi^{-1}(\varepsilon^\beta), T]$. В этом случае интеграл

$$\begin{aligned}
& \int_0^t d_{\varphi(s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} \quad \text{представим в виде} \\
& \int_0^t d_{\varphi(s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} = \int_0^{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^\beta)} d_{\varphi(s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} + \\
& + \int_{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^\beta)}^t d_{\varphi(s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t K(\tau, \tau) d\varphi(\tau)}
\end{aligned}$$

Здесь для второго слагаемого $|u(\varphi^{-1}(y)) - u(\varphi^{-1}(x))| \leq W_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta)$ поэтому, как и выше, для этого интеграла имеем оценку $W_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta)$, а для первого слагаемого

$$\begin{aligned}
& \|u(t) - u(0)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} + 2\|u(t) - u(0)\|_C \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varphi^{-1}(\varphi(t) - \varepsilon^\beta)} \bar{K}(s, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} d\varphi(s) + \\
& + W_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta) = \|u(t) - u(0)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} + 2\|u(t) - u(0)\|_C \int_0^{\varphi^{-1}(\varphi(t) - \varepsilon^\beta)} d_{\varphi(s)} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} + \\
& + W_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta) = \|u(t) - u(0)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} + 2\|u(t) - u(0)\|_C \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\varphi^{-1}(\varphi(t) - \varepsilon^\beta)}^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} - e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} \right) + \\
& + W_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta) \leq 2\|u(t) - u(0)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\varphi^{-1}(\varphi(t) - \varepsilon^\beta)}^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} + W_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta)
\end{aligned}$$

Так как $\bar{K}(t, t)$ -непрерывная функция на $[0, T]$ и $\bar{K}(t, t) > 0$, то по теореме Вейерштрасса она достигает своей нижней грани $\inf_{t \in [0, T]} \bar{K}(t, t) = \delta > 0$.

$$\text{Тогда } e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\varphi^{-1}(\varphi(t) - \varepsilon^\beta)}^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} \leq e^{-\frac{\delta}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^\beta} = e^{-\frac{\delta}{\varepsilon^{1-\beta}}}.$$

$$\text{Откуда } |\psi(t, \varepsilon)| \leq 2\|u(t) - u(0)\|_C e^{-\frac{\delta}{\varepsilon^{1-\beta}}} + W_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta), \quad t \in [0, T].$$

9)

Таким образом, доказана

Лемма 4. Пусть $K(t, s) \in C(\bar{G})$, и $K(t, s)$ удовлетворяет условиям леммы 3.

Если $u(t)$ принадлежит классу $C[0, T]$, то верна оценка (9).

Лемма 5. Имеет место оценка

$$\|H(t, s, \varepsilon)\| \leq l(s).$$

(10)

Доказательство. Из формулы (7), по лемме 3 получим

$$|H(t, s, \varepsilon)| \leq \frac{l(s)}{\varepsilon^2} \int_s^t \bar{K}(v, v) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_v^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} \left(\int_v^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau) \right) d\varphi(v) + \frac{l(s)}{\varepsilon} \int_s^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau) \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)}.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned}
& \int_s^t \bar{K}(v, v) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_v^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} \left(\int_v^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau) \right) d\varphi(v) = \varepsilon \int_s^t d\varphi(v) \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_v^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} \int_v^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau) = \\
& = \varepsilon \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_v^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} \int_v^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau) \right) \Big|_s^t + \int_s^t \bar{K}(v, v) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_v^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} d\varphi(v) \Bigg) = \\
& = \varepsilon \left(- \int_s^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} + \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)} \right) \right),
\end{aligned}$$

откуда $\|H(t, s, \varepsilon)\| \leq l(s)$. Лемма 5 доказана.

Теорема 1. Пусть $K(t, s) \in C(\bar{G})$, $\varphi(t)$ – строго возрастающая функция с условием $\varphi(0) = 0$ и $u(t)$ – решение уравнения из класса $C[0, T]$. Тогда, если $K(t, s)$ удовлетворяет условиям леммы 3, то решение уравнения (4) сходится к $u(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ по норме $C[0, T]$.

Доказательство. Из формулы (6) и из оценок (9), (10) имеем

$$|z(t, \varepsilon)| \leq \int_0^t |l(s)z(s, \varepsilon)| d\varphi(s) + |\psi(t, \varepsilon)| \leq \int_0^t l(s)|z(s, \varepsilon)| d\varphi(s) + 2\|u(t) - u(0)\|_C e^{-\frac{\delta}{\varepsilon^{1-\beta}}} + W_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta)$$

, откуда по обобщенному неравенству Гронуолла-Бэллмана получим

$$\begin{aligned}
|z(t, \varepsilon)| & \leq \left[2\|u(t) - u(0)\|_C e^{-\frac{\delta}{\varepsilon^{1-\beta}}} + W_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta) \right] e^{L(t) \cdot \varphi(t)}, \text{ где } 0 < l(t) \leq L. \quad \forall t \in [0, T] \\
|z(t, \varepsilon)| & \leq \left[2\|u(t) - u(0)\|_C e^{-\frac{\delta}{\varepsilon^{1-\beta}}} + W_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta) \right] e^{L \cdot \varphi(T)}.
\end{aligned}$$

(11)

Следствие 1. Пусть при $\tau > q$ для любых $(\tau, s), (q, s) \in G$ справедлива оценка

$$|K(\tau, s) - K(q, s)| \leq l(s) \int_q^\tau K(s, s) ds, \text{ где } l(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0, T], K(t, t) > 0 \text{ и } \forall \theta \in (0, 1) \text{ имеет}$$

$$\text{место } \int_q^t K(s + \theta(\tau - s), s + \theta(\tau - s)) d\varphi(s + \theta(\tau - s)) \leq \int_q^t K(\tau, \tau) d\varphi(\tau). \text{ Тогда решение уравнения}$$

(2) в пространстве $C[0, T]$ единственно.

Доказательство. Пусть $u_1(t)$, $u_2(t)$ два различных решения уравнения (2).

Тогда $u^0(t) = u_1(t) - u_2(t)$ является решением уравнения

$\int_0^t K(t, s) u^0(s) d\varphi(s) = 0$, откуда из условия следствия 1 следует

$$\left| \int_0^t \bar{K}(s, s) u^0(s) d\varphi(s) \right| \leq \int_0^t |\bar{K}(t, s) - \bar{K}(s, s)| \cdot |u^0(s)| d\varphi(s) \leq \\ \leq \int_0^t l(s) \left(\int_s^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau) \right) u^0(s) d\varphi(s) \leq \int_0^t l(s) |u^0(s)| d\varphi(s) \cdot \int_0^t \bar{K}(\tau, \tau) d\varphi(\tau)$$

Пусть $m(t) = \inf_{s \in [0, t]} u^0(s)$, $M(t) = \sup_{s \in [0, t]} u^0(s)$, тогда

$$m(t) \bar{K}(s, s) \leq \bar{K}(s, s) u^0(s) \leq M(t) \bar{K}(s, s).$$

$$\text{Откуда } m(t) \int_0^t \bar{K}(s, s) d\varphi(s) \leq \int_0^t \bar{K}(s, s) u^0(s) d\varphi(s) \leq M(t) \int_0^t \bar{K}(s, s) d\varphi(s).$$

Отсюда ясно, что существует величина $P(t)$, удовлетворяющая неравенству $m(t) \leq P(t) \leq M(t)$, что $\int_0^t \bar{K}(s, s) u^0(s) d\varphi(s) = P(t) \int_0^t \bar{K}(s, s) d\varphi(s)$, так как функция $u(s)$ непрерывна, она принимает в промежутке $(0, t)$ все значения, лежащие между $m(t)$, $M(t)$, в том числе и значение $P(t)$. Поэтому найдется такое значение $t^* \in [0, t]$, для которого $u^0(t^*) = P(t)$.

Тогда из (12) имеем $|u^0(t^*)| \leq \int_0^t l(s) |u^0(s)| d\varphi(s)$. Откуда при $t \rightarrow 0$ получим $u^0(0) = 0$.

Пусть теперь $u(t)$ – решение уравнения (2) при $f \equiv 0$. Тогда $v(t, \varepsilon) \equiv 0$ и из (11) имеем

$$\|u(t)\|_C \leq \left(2\|u(t)\|_C e^{-\frac{\delta}{\varepsilon^{1-\beta}}} + W_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta) \right) e^{L \cdot \varphi(T)}, \quad \|u(t)\|_C \leq MW_{\bar{u}}(\varepsilon^\beta).$$

Откуда $\|u(t)\|_C = 0$, $u(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асанов А. Манас университети, Табыгий Илимдер журналы 1(2001).
2. Асанов А. Манас университети, Табыгий Илимдер журналы 2(2001).
3. Иманалиев М.И., Асанов А. Исследования по интегро-дифференциальным Уравнениям. – Фрунзе, 1988, – Выпуск 21
4. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики, том 5. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литер. 1959.