УДК 621.384
А.АЛИШЕРОВ, Ч.К.МАТИЕВА, Э.У.БАЯЛЫШОВА
E-mail: ksucta@elcat.kg.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЛИНЕЙНОМ УСКОРИТЕЛЕ

Макалада ылдамдатуучу системалардагы дүрмөттөлгөн бөлүкчөлөрдүн динамикасынын математикалык моделдерин түзүү проблемалары каралган.

В работе рассматривается проблема математического динамики продольного движения заряженных частиц в ускоряющих системах.

In work the problem mathematical dynamics of longitudinal movement of the charged particles in accelerating systems is considered.

В настоящее время математические методы моделирования и оптимизации находят все большее применение в различных областях науки и техники. Развитие специального математического обеспечения для разнообразных практических задач приобретает все большее значение. Особым классом задач, привлекающим внимание многих исследователей, является круг математических проблем, связанных с созданием ускорителей заряженных частиц. Выделим здесь, прежде всего, задачи математического моделирования и анализа динамики заряженных пучков в ускоряющих и фокусирующих структурах, проблемы формирования оптимальной динамики частиц, обеспечивающей требуемые параметры ускорительной техники. Предлагаемая вниманию читателя статья посвящена разработке математических методов моделирования, качественного анализа и оптимизации движения управляемых пучков динамических систем, ориентированных на решение задач проектирования, создания и эксплуатации ускорителей заряженных частиц.

Для различных систем ускорения и формирования пучков заряженных частиц строятся математические модели управления, включающие выбор и представление управляющих структур и параметров, определение наиболее адекватных и эффективных критериев оценки этих структур через динамические характеристики пучка.

Необходимым условием ускорения заряженных частиц является наличие электрического поля /1/, так как сила, действующая на частицу со стороны магнитного поля„ направлена перпендикулярно скорости частицы и работы не производит. Поэтому при перемещении заряженной частицы в электромагнитном поле изменение ее кинетической энергии W_K обусловлено действием только электрического поля.

Пусть **E** – вектор напряженности электрического поля. Тогда приращение кинетической энергии частицы с зарядом *e* определяется соотношением

$$\Delta W_K = \int eEdr.$$

(1)

Здесь интеграл берется вдоль траектории частицы. Если электрическое поле стационарно и обладает потенциалом, то правая часть уравнения (1) будет равна $e\Delta U$, где ΔU – разность потенциалов между конечной и начальной точками траекторий частицы.

Рассмотрим однородное электрическое поле, направленное вдоль некоторой оси *Oz* и образуемое двумя параллельными разноименно заряженными пластинами. Напряженность поля здесь определяется по формуле $E_Z = \Delta U / d$, где ΔU – напряжение, а d – расстояние между пластинами. Заряженная частица с зарядом *е,* находясь в этом поле некоторое время τ, получает приращение импульса p_Z, равное

$$\Delta P_Z = eE_Z\tau .$$

На этом примере видно, что для получения заряженных частиц с большими кинетическими энергиями необходимо создать сильные электрические поля либо сделать так, чтобы частица долгое время находилась в электрическом поле или проходила его многократно. В настоящее время существует много различных физических установок – ускорителей – для получения заряженных частиц с высокими энергиями.

Отметим, что по характеру траекторий частиц ускорители делятся на циклические и линейные. В циклическом ускорителе частицы движутся по спиралям, а в линейном – траектории частиц близки к прямой.

Принцип автофазировки наиболее наглядно может быть описан на примере ускорителя с бегущей волной, используемого чаще для ускорения электронов. Такой ускоритель (волновод) представляет собой полый цилиндр, нагруженный диафрагмами. В диафрагмированном волноводе можно возбудить электромагнитную волну (ускоряющую), распространяющуюся вдоль волновода с фазовой скоростью, меньшей скорости света /2/, и имеющую ненулевую электрическую составляющую по оси *Oz,* используемую для ускорения частиц. Продольную электрическую составляющую поля ускоряющей волны для краткости называют также ускоряющей волной. Ускоряющая волна (основная гармоника) на оси ускорителя записывается в виде

$$E_Z = E_0(z)\sin\left(w\int_0^z \frac{dz}{U_\phi(z)} - wt + \varphi_0 \right),$$

(3)

где £$_0$(z), $\vartheta_\phi(z)$ – амплитуда и фазовая скорость ускоряющей, изменяющиеся вдоль ускорителя; $w = 2\pi f = 2\pi c / \lambda$ – угловая частота; f и λ – соответственно частота и длина волны в свободном пространстве; φ_0 – начальная фаза; t – время. Отметим, что в случае стоячих волн, используемых в ускорителях с трубками дрейфа, $\vartheta_\phi = \infty, w/\vartheta_\phi = 0$ и, следовательно,

$$E_Z = E_0(z)\sin(-wt+\varphi_0).$$

(4)

Пусть в момент t продольная координата частицы равна **z.** Тогда под фазой частицы понимают соответствующую фазу волны, а именно величину

$$\varphi = w\int_0^z \frac{dz}{\vartheta_\phi} - wt + \varphi_0,$$

(5)

отсчитываемую от нуля поля ускоряющей волны.

Рассмотрим, как происходит ускорение заряженных частиц в диафрагмированном волноводе, которое называют ускорением на бегущей волне, что образно выражает суть дела. Для определенности считаем, что ускоряются электроны.

Пусть электрон находится в фазе φ ускоряющей волны. Тогда на него вдоль оси Oz действует сила

$$F = eE_z = eE_0(z)\sin\varphi.$$

Причем, так как e<0, то при $\varphi \in (-\pi + 2k\pi, 2k\pi), k = 0, +1, \ldots,$ электрон будет находиться в ускоряющей полуволне, т.е. действующая на него сила будет ускоряющей, а при $\varphi \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$ – в замедляющей. Допустим, что электрон попал в ускоряющую полуволну. Тогда он получает приращение скорости вдоль оси Oz (волновода). Если при этом фазовая скорость волны сначала близка к скорости электрона, а затем увеличивается синхронно с увеличением скорости электрона, то процесс ускорения частицы происходит непрерывно.

Частицу, продольная скорость которой совпадает в каждый момент с фазовой скоростью волн, называют равновесной (синхронной). Фазу, скорость, энергию и импульс равновесной частицы называют также равновесными и отмечают соответствующие величины индексом *"c"*. Пусть φ_c – равновесная фаза. Из определения $\vartheta_c = \vartheta_\phi$ следует, $\varphi_c = const$, т.е. равновесные частицы движутся в постоянных фазах.

Рассмотрим теперь принцип автофазировки. Суть его состоит в следующем. Пусть амплитуда $E_0(z)$ ускоряющей волны (3) подобрана таким образом, что обеспечивает текущее равенство фазовой скорости волны и продольной скорости электрона. Иначе говоря, имеется равновесная частица с некоторой фазой φ_c. Исследуем поведение частиц, находящихся вблизи равновесной частицы. Пусть фазе φ_C соответствует передний склон ускоряющей волны. Тогда согласно (6) частицы, имеющие фазы $\varphi < \varphi_C$, получают большее ускорение, чем равновесная частица, и со временем опередят ее. Поэтому они перейдут в область пониженной напряженности ускоряющей волны, т.е. будут иметь фазы $\varphi > \varphi_C$. В этой области частицы будут получать меньшее приращение в скорости, чем равновесная частица. Следовательно, со временем они отстанут от нее, т.е., опять попадут в область повышенной напряженности поля, где будут получать ускорение, большее по сравнению с равновесной частицей.

Таким образом, около равновесной частицы будут наблюдаться колебания частиц. Причем все они в целом будут ускоряться. Это явление и носит название автофазировки.

Следует также отметить, что наряду с равновесной фазой φ_C на переднем склоне ускоряющей полуволны равновесной будет фаза $\varphi_C = \pi - \varphi_C$ на заднем склоне волны. Однако эта фаза не является устойчивой. Группировки ускоряемых частиц около частицы с этой фазой не происходит. Действительно, если частицы имеют фазы, $\varphi < \overline{\varphi}_C$, т.е. находятся в области пониженной напряженности поля, то они со временем отстанут от равновесной частицы и попадут в область замедляющей полуволны. Тем самым эти частицы не попадут в режим ускорения.

С другой стороны, скорость частиц с фазами $\varphi > \overline{\varphi_c}$ будет увеличиваться до тех пор, пока они не перегонят равновесную частицу с фазой φ_C, около которой и будет происходить группировка частиц. Аналогичная картина имеет место в поле стоячих волн, используемых в ускорителях с трубками дрейфа. При этом устойчивая равновесная фаза приходится на время возрастания поля в ускоряющем зазоре (между трубками дрейфа).

Итак, мы рассмотрели принцип ускорения заряженных частиц в линейных резонансных ускорителях, использующих механизм автофазировки. Очевидно, что при реализации такого способа ускорения частиц некоторые из них выпадают из режима ускорения, и, следовательно, неизбежна потеря частиц, причем она может оказаться существенной.

В связи с этим возникает задача группировки частиц, заключающаяся в выборе таких законов изменения амплитуды напряженности и фазовой скорости ускоряющей волны, которые обеспечивали бы наиболее полный захват частиц в режим ускорения и требуемые выходные параметры пучка. В частности, эти законы реализуются выбором расположения и размеров диафрагм в волноводе, его длины и диаметра, а также соответствующей высокочастотной мощности и частоты питающего генератора /2, 3/.

Аналогично обстоит дело в ускорителе с трубками дрейфа, где выбор длин трубок, зазоров между ними и величины напряженности поля в зазорах определяют в основном выходные параметры пучка.

Движение заряженной частицы в электромагнитном поле в предположении, что ее заряд можно считать точечным, описывается уравнением Ньютона–Лоренца /1/

$$dp/dt = e\{E + [\vartheta B]\}, \tag{6}$$

где **p**, e, ϑ – импульс, заряд и скорость частицы; $\boldsymbol{E}$ – напряженность электрического поля; **B** – магнитная индукция. Квадратные скобки означают векторное произведение.

Выпишем основные релятивистские соотношения, связывающие массу $\boldsymbol{m}$, скорость ϑ, импульс **p** и полную энергию W_n. частицы:

$$m = m_0 / \sqrt{1-\beta^2}, p = m\vartheta / \sqrt{1-\beta^2},$$
$$W_n = W_0 + W_k = mc^2 = W_0 / \sqrt{1-\beta^2},$$
$$W_0 = m_0 c^2, \beta = \vartheta / c.$$

(7)

Здесь m_0 – масса покоя частили; $\vartheta = \vartheta|; \beta$ – приведенная скорость; W_0 – энергия покоя; W_K – кинетическая энергия; c – скорость света.

Пусть x, y, z – декартовые координаты. Тогда векторное уравнение (6) можно представить в виде трех скалярных:

$$\frac{dPx}{dt} = \frac{d(mx)}{dt} = F_{X,} \qquad (8)$$
$$\frac{dPy}{dt} = \frac{d(my)}{dt} = Fy, \qquad (9)$$
$$\frac{dPz}{dt} = \frac{d(mz)}{dt} = Fz, \qquad (10)$$

где $F_x = e(E_x + yB_z - zB_y)$, $F_y = e(E_y + zB_X - xB_z)$, $F_z = e(E_z + xB_y - yB_x)$, *Px, Py, Pz* – компоненты вектора импульса **p,** соответствующие координатным осям *Ox, Oy, Oz,* аналогично E_X, E_Y, E_Z *и* B_X, B_y, B_z – компоненты электрического и магнитного полей.

Запишем теперь уравнения движения частицы в цилиндрической системе координат τ, θ, z, связанных с декартовыми координатами *x, y, z* соотношениями

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta.$$

(11)

Единичные векторы в цилиндрической системе координат обозначим через e_r, e_θ, e_z. Тогда радиус-вектор частицы относительно начальной точки отсчета в этой системе координат представим в виде $s = re_r + ze_r$. Дифференцируя **s** по **t**, получаем вектор скорости

$$\vartheta = s = re_r + re_r + ze_r + ze_r.$$

(12)

Принимая во внимание, что

$$e_r = \theta e_\theta, e_\theta = -\theta e_r, e_z = 0,$$

(13)

и учитывая (I2), перепишем уравнение (6):

$$\frac{d(m\vartheta)}{dt} = \left(\frac{d(mr)}{dt} - mr\theta^2\right)e_r + \left(\frac{d(mr\theta)}{dt} + mr\theta\right)e_e + \left(\frac{d(mz)}{dt}\right)e_z.$$

(14)

Отметим, что компонента по e_θ в равенстве (I4) преобразуется к виду

$$\frac{d(mr\theta)}{dt}+mr\theta=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\theta).$$

(15)

В соответствии с равенствами (12), (13) скорость ϑ имеет в цилиндрических координатах компоненты $r, r\theta, z$, соответственно по e_r, e_θ, e_z, поэтому

$$[\vartheta B]=(r\theta B_z-zB_\theta)e_r+(zB_r-rB_z)e_\theta+(rB_\theta-r\theta B_r)e_z.$$

(16)

Учитывая полученные соотношения (14) (16), уравнение (6) в цилиндрической системе координат **r,** θ, **z,** запишем в виде

$$\frac{d(mr)}{dt}-mr\theta^2=e(E_r+r\theta B_z-zB_\theta,$$

(17)

$$\frac{1}{r}\frac{d(mr^2\theta)}{dt}=e(E_\theta+zB_r-rB_z),,$$

(18)

$$\frac{d(mz)}{dt}=e(E_z+rB_\theta-r\theta B_r).$$

(19)

Считаем далее, что ось *Oz* совмещена с осью линейного ускорителя (волновода). Уравнения (8) и (9) называют уравнениями поперечного движения, уравнение (10) – уравнением продольного движения. Уравнения (17)-(19) называют уравнениями радиального, азимутального и продольного движения соответственно. Для решения уравнений движения необходимо задать электромагнитное поле. Выражение для компонент электромагнитного поля получают при решении с учетом граничных условий для нагруженного волновода или резонатора уравнений Максвелла

$$rotB=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}+\mu_0 j,$$

(20)

$$rotE=\partial B/\partial t,$$

(21)

$$di\vartheta E=p/\varepsilon_0,$$

(22)

$$di\vartheta B=0.$$

(23)

Здесь ε_0 – электрическая постоянная; μ_0 – магнитная постоянная; p – объемная плотность заряда; j – плотность тока.

Обычно электромагнитное поле в ускоряющих системах можно представить как суперпозицию трех полей: высокочастотного ускоряющего поля, возбуждаемого генератором, поля, образуемого магнитными фокусирующими системами, и поля собственного заряда ускоряемых частиц. В дальнейшем будем рассматривать движение частиц в ускорителе на бегущей волне в поле основной гармоники (3), а в ускорителе с трубками дрейфа – *в* поле (4). При этом будем предполагать, что ускоряющее поле является аксиально-симметричным, т.е.

$$E_0 = 0, B_r = 0, B_z = 0 .$$

(24)

На самом деле ускоряющее поле имеет более сложную структуру и представляет собой бесконечную сумму пространственных гармоник, бегущих с разными скоростями /2/. Однако ускоряемые частицы эффективно взаимодействуют только с основной гармоникой, скорость распространения которой вдоль ускорителя близка к скорости частиц. Как и в нашем случае, в качестве основной гармоники выбирают гармонику компонента ускоряющего поля, распространяющейся в направлении ускорения частиц. Действие остальных гармоник носит осциллирующий возмущающий характер.

Введя приведенную энергию $\gamma = W_{Ï} / W_{Î}$ и используя релятивистское соотношение $\beta = \sqrt{\gamma^2 - 1} / \gamma$, систему уравнений (10), описывающих продольное движение частиц, запишем в следующем виде /4, 5/:

$$\frac{d\gamma}{dz} = \alpha(z) \cos\varphi,$$

(25)

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}},$$

(26)

где $\alpha(z) = eE_0(z) / m_0 c^2$ – параметр, характеризующий напряженность ускоряющего поля вдоль оси ускорителя, φ – фаза частицы, λ – длина волны в свободном пространстве.

На основе систем дифференциальных уравнений (25), (26) с соответствующими начальными условиями $(\gamma_0, \varphi_0) \in M_0$, где M_0 – множество начальных состояний пучка частиц, и выбором функционала можно разработать алгоритмы оптимизации продольного движения заряженных частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М., 1967.
2. Вальднер О.А., Шальнов А.В. Электромагнитные поля в диафрагмированных волноводах линейных электронных ускорителей. – М., 1963.

3. Вальднер О.А., Власов А.Д., Шальнов А.В. Линейные ускорители. – М., 1969.
4. Овсянников Д.А. Математические методы оптимизации динамики пучков. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. – 192 с.
5. Гаращенко Ф.Г. Применение методов практической устойчивости к моделированию и управлению пучками заряженных частиц // Автоматика. – 1982. – № 5. – С. 42-48.