УДК 681.3.06

Б.Т.УКУЕВ, М.А.ХИЖНЯК
E-mail: ksucta@elcat.kg.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОБНАРУЖЕНИЮ И ИСПРАВЛЕНИЮ ОШИБОК В ПАКЕТАХ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ РЕШЕНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

Акыркы он жылдын ичинде ар кандай практикалык маселелерди чечүүгө арналган MathCad, MAthLab, Scilab ж. б. у. с. программалар жыйындысы иштелип чыкты жана алар чоң ийгиликтерге жетишип, эл алдынды кеңири пайдаланууга ээ болду. Иштеп чыгуучулардын зор эмгегине жана программалардын белгилүүлүктөрүнө шек келтирбестен, бул жыйындыларды изилдөөлөрдөн кийин табылган каталарды белгилебей кетүүгө болбойт. Бул жерде кадимки илимдин өнүгүүсө орун алат: жакында эле толук бүткөндөй көрүнгөн нерседен убакыт өткөн сайын кайра карап, толуктап, тактап чыгуучу так эместиктер табылат.

В последние десятилетия были разработаны и пользуются заслуженной популярностью пакеты прикладных программ, предназначенные для решения различных практических задач – пакеты Matlab, Mathcad, Scilab и многие другие.

Не подвергая сомнению заслуженную популярность этих пакетов и большой труд, вложенный в них разработчиками, нельзя не отметить ошибки, обнаружившиеся в этих пакетах после проведения исследований по изменению корректности при эквивалентных преобразованиях. Здесь имеет место обычный прогресс науки – в том, что еще недавно казалось совершенным и законченным, со временем чаще всего обнаруживаются пробелы и неточности, требующие доработки и совершенствования.

Last decades have been developed and packages of the applied programs intended for the decision of various, practical problems - packages Matlab, Mathcad, Scilab and many other things use the deserved popularity.

Not calling in question the deserved popularity of these packages and the big work enclosed in them by developers, it is necessary to note the errors which have been found out in these packages after carrying out of researches on change of a correctness at equivalent transformations. Usual progress in science - that else seemed recently made and finished Here takes place, in due course blanks and the discrepancies demanding completion and perfection more often are found out.

После проведения эквивалентного преобразования при решении практических задач появляются некоторые неточности, ведущие к дальнейшему ошибочному решению. Это связано с тем, что в последнее время область науки значительно расширилась, и нужны некоторые поправки и дополнения к существующим программам.

Рассмотрим обнаружившиеся ошибки и неточности последовательно.

Численное интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В рассматриваемых пакетах прикладных программ численное интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях разбивается на два этапа:

- Система эквивалентными преобразованиями приводится к нормальной форме, к системе n уравнений первого порядка.
- Система в нормальной форме интегрируется численно по единой программе.

Преобразование к нормальной форме в некоторых пакетах выполняется автоматически, с помощью отдельной программы, в других пакетах преобразование выполняет пользователь компьютера.

Однако при этом допускается ошибка – не оговаривается, что существуют особые системы дифференциальных уравнений, решения которых не обладают непрерывной зависимостью решений от параметров. Задача численного интегрирования таких систем при заданных начальных условиях является задачей некорректной. Поэтому полученное решение может совершенно не соответствовать реальному поведению исследуемого объекта или процесса, а ошибка в расчетах может стать причиной аварий и катастроф.

Но в популярных пакетах прикладных программ об опасностях, возникающих при преобразованиях к нормальной форме особых систем, ничего не говорится. Поэтому пользователь компьютера, столкнувшийся с особой системой, не обладающей свойством непрерывной зависимости решений от параметров, может сделать совершенно ошибочный вывод о поведении исследуемого объекта или процесса.

Отсутствие предупреждения о свойствах особых систем, отсутствие предупреждения об опасности встречи с ними, о необходимости дополнительных операций при встрече с особыми системами является той ошибкой, присутствующей в популярных пакетах, которую совершенно необходимо исправить. Это исправление совсем несложно сделать.

Одной из основных и наиболее часто встречающихся причин отсутствия непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений от параметров и коэффициентов является «обнуление» старших членов в характеристическом полиноме.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами вида:

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots)x_1 + (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \cdots)x_2 = 0; \qquad (1)$$

$$(c_k D^k + c_{k-1} D^{k-1} + \cdots)x_1 + \left(d_p D^p + d_{p-1} D^{p-1} + \cdots\right)x_2 = 0. \qquad (2)$$

Характеристический полином системы (1)–(2) равен определителю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots & b_m\lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots \\ c_k\lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots & d_p\lambda^p + d_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots \end{vmatrix} = \left(a_n d_p \lambda^{n+p} - b_m c_k \lambda^{m+k}\right) + \cdots$$

(выписываем лишь результат перемножения и вычитания старших членов элементов определителя).

Теперь понятно, что старший член характеристического полинома станет равным нулю (т.е. произойдет его обнуление) при выполнении двух условий:

$$n + p = m + k; \qquad (3)$$

$$a_n d_p - b_m c_k = 0. \qquad (4)$$

Для всех тех систем дифференциальных уравнений, в которых выполняются равенства (3) и (4), задача численного интегрирования при заданных начальных условиях является некорректной.

Эту ошибку можно исправить, дополнив программы пакетов программами проверок равенств (3) и (4). Если они выполнены, программа должна предупреждать пользователя компьютера: «Вы встретились с особой системой и некорректной задачей. Либо воздержитесь от расчета, либо готовьтесь к тому, что ваш расчет может коренным образом разойтись с реальным поведением исследуемого вами объекта или процесса».

Отметим еще, что опасным является не только точное выполнение равенства (4), но и приближенное – опасно, если разность $a_n d_p -$ окажется много меньше (на два порядка и более), чем сами произведения $a_n d_p$ *и* в отдельности. В этом случае задача интегрирования системы дифференциальных уравнений не является некорректной, но она плохо обусловлена: коренное изменение поведения исследуемого объекта или процесса в этом случае также может произойти, но уже не при сколь угодно малых изменениях коэффициентов и параметров системы, а при конечных малых их изменениях.

Для предупреждения опасных ошибок пакеты программ численного интегрирования систем дифференциальных уравнений должны быть дополнены программой, вычисляющей левую часть формулы (4). Если она окажется хотя бы на два порядка меньше, чем произведение, то программа должна предупредить пользователя компьютера: «Вы встретились с плохо обусловленной задачей. Имейте в виду, что при малых отклонениях параметров системы от расчетных значений реальное поведение исследуемого объекта или процесса может коренным образом отличаться от результатов расчета».

Заметим, что обращение в нуль старшего члена характеристического полинома является наиболее распространенной, но не единственной причиной некорректности задачи интегрирования систем дифференциальных уравнений. Однако «обнуление» старшего члена характеристического полинома проверяется наиболее просто, и эта простая проверка сразу уменьшает вероятность ошибок в расчетах.

1. Расчеты устойчивости

Присутствующие в популярных пакетах прикладных программ (пакеты Matlab, Mathcad и др.) программы расчета устойчивости различных объектов и, прежде всего, систем управления также могут быть источником ошибок для пользователей компьютеров. Причина ошибок в расчетах заключается в отсутствии учета возможного изменения корректности задачи расчета устойчивости при эквивалентных преобразованиях, используемых для унификации программного обеспечения.

Так, например, устойчивость систем управления, математической моделью которых являются системы дифференциальных уравнений, состоящие из уравнений различных порядков, проверяется в упомянутых пакетах прикладных программ после приведения систем к нормальной форме (или, пользуясь терминологией теории управления, – к «пространству состояний»). Такой подход, разумеется, очень удобен, поскольку позволяет использовать одну программу вместо очень большого числа программ для различных систем, которые потребовались бы в том случае, если бы приведение системы к нормальной форме не использовалось. Однако приведение системы к нормальной форме может оказаться – как уже говорилось – преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном, и в этом случае расчет устойчивости окажется ошибочным.

Приведем рекомендации по дополнению популярных пакетов прикладных программ небольшими дополнительными программами, которые восстановят достоверность расчетов устойчивости.

Необходима дополнительная программа, которая вычисляла бы характеристический полином системы управления непременно «по реальным выходам», т.е. учитывала бы, какие из регулируемых переменных действительно могут использоваться в канале обратной связи, и какая именно система дифференциальных уравнений, состоящая из уравнений различных порядков, в которые входят эти переменные, будет в этом случае описывать объект управления. А когда характеристический полином получен, то необходимо не только вычислить его корни, но и проверить:

- не понизился ли его порядок, не оказался ли он ниже суммы порядков дифференциальных уравнений исследуемой системы. Понижение порядка говорит об «обнулении» старшего члена, что сразу свидетельствует о некорректности задачи расчета устойчивости;
- не оказались ли какие-либо из коэффициентов характеристического полинома малыми разностями больших коэффициентов исходной системы. В этом случае задача расчета устойчивости является плохо обусловленной, и малые, неизбежные на практике, отклонения реальных параметров от расчетных значений могут сделать результаты расчета устойчивости совершенно ошибочными с соответствующими тяжелыми последствиями – вплоть до аварий и катастроф.

2. **Алгоритмы и программы синтеза оптимальных систем управления.**

Пакет Matlab и некоторые другие пакеты прикладных программ включают в себя программы синтеза систем управления, доставляющих минимум квадратичным или среднеквадратичным критериям качества работы системы. При этом не делается оговорок об особых случаях, когда общие алгоритмы синтеза приводят к опасным системам, способным терять устойчивость при малых отклонениях реальных параметров объекта управления или регулятора от их расчетных значений, и тем самым эти алгоритмы становятся причиной аварий и даже катастроф.

Любопытно отметить, что именно в задачах синтеза систем управления, доставляющих минимум квадратичным критериям качества, впервые на практике столкнулись с явлением изменения корректности задачи при эквивалентных преобразованиях.

Как известно, метод синтеза регуляторов, обеспечивающих для линейных систем минимум квадратичных критериев качества, был предложен А.М.Летовым и назван методом «аналитического конструирования» регуляторов.

Перед изготовлением системы управления и ее установкой на реальный объект «аналитически сконструированные» регуляторы тщательно проверяли на устойчивость и на сохранение устойчивости при «дрейфе» параметров. Однако эта проверка проводилась для систем управления, в которых в канале обратной связи используются все переменные состояния, а на практике чаще всего часть из них недоступна. В этих случаях систему управления преобразовывали к доступным переменным, пользуясь при этом только эквивалентными (в классическом смысле) преобразованиями, сохранявшими неизменными хорошие переходные процессы в системах.

В области синтеза оптимальных систем управления этот недостаток популярных пакетов прикладных программ может быть легко исправлен при любом числе переменных состояний и реальных выходов системы управления.

Предельный и наиболее опасный в части обеспечения параметрической устойчивости случай, когда в канале обратной связи может быть использована не более чем одна переменная состояния. В этом случае нет даже необходимости вводить в используемые пакеты прикладных программ дополнительные программы проверки на возможную встречу с особыми системами. Достаточно проверить выполнение критерия Ю.Петрова – т.е. выполнение простого неравенства $p \geq m+q-1$.

Для общего случая, для многомерных систем управления с большим числом регулируемых величин и управляющих воздействий популярные пакеты прикладных программ следует дополнить небольшими программами, которые производили бы проверку «номера шага алгоритма предварительных преобразований», выявляли бы опасные системы, а после их выявления производили бы коррекцию алгоритма синтеза для обеспечения сохранения устойчивости системы управления при вариациях параметров.

3. Алгоритмы, использующие цепочки эквивалентных преобразований

Многие алгоритмы компьютерных вычислений, закодированные в популярных пакетах прикладных программ (Matlab, Mathcad и др.), включают в себя цепочки эквивалентных преобразований.

Так, например, используя метод Гаусса решения систем алгебраических уравнений:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{n1}x_n = b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{array} \qquad (5)$$

мы постепенно преобразуем путем эквивалентных преобразований, умножений и сложений матрицу коэффициентов системы (5)

$$\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{n1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

в треугольную форму, после чего искомые решения легко находятся одно за другим.

Точно так же один из наиболее удобных методов вычисления определителей заключается в последовательном понижении их порядка путем эквивалентных преобразований, сложений и умножений.

Одним из источников неточностей и ошибок в компьютерных вычислениях являются погрешности округления. Хотя компьютеры работают с большим количеством значащих цифр и поэтому погрешность, вносимая каждым отдельным округлением, мала, но при огромном объеме математических операций, выполняемых современными быстродействующими вычислительными машинами, погрешности округления начинают очень серьезно влиять на точность и надежность компьютерных вычислений.

Одним из наиболее простых и эффектных методов борьбы с погрешностями округления является перепрограммирование компьютера на вычисление с удвоенным количеством десятичных знаков, хотя удвоение и снижает скорость вычислительного процесса. Все это хорошо известно, однако недавно обнаружился еще один новый источник ошибок компьютерных вычислений. Хотя бы одно из цепочки эквивалентных преобразований может оказаться не эквивалентным в расширенном смысле. Этого уже достаточно для того, чтобы решаемая задача стала некорректной, а раз так, то уже сколь угодно малая погрешность одного единичного округления может теперь привести к серьезной ошибке.

По сравнению со старыми, хорошо известными источниками ошибок в компьютерных вычислениях от погрешностей округления, с которыми давно научились бороться, новый источник ошибок обладает следующими характерными чертами.

- Ошибка не нарастает медленно, она не пропорциональна количеству вычислений, округлений и эквивалентных преобразований. Ошибка может возникнуть, если хотя бы одно из использованных преобразований оказалось эквивалентным в классическом, но не в расширенном смысле.
- Повышение точности вычислений, удвоение числа десятичных знаков, с которыми работает компьютер, не помогает избежать ошибки.

Исследованный источник появления лишних фальшивых решений для задачи о вычислении собственных значений особой опасности не представляет: хорошо известно, что все полученные собственные значения нужно проверять подстановкой в исходную систему уравнений.

Таким образом, для задачи о вычислении собственных значений использование преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, не является опасным источником ошибок и не требует дополнительных программ для выявления ошибочных решений.

Основным результатом исследований, описанных в этой работе, является открытие новых свойств очень широко используемых в математике эквивалентных преобразований.

Поскольку эквивалентные преобразования математических моделей самых различных объектов и процессов пронизывают собой всю математику, то открытие их новых свойств и, в частности, возможности изменения корректности при эквивалентных преобразованиях, безусловно, повлечет за собой многочисленные следствия в прикладной математике и в практике компьютерных вычислений. К настоящему времени исследована только небольшая часть этих следствий. Исследования будут продолжаться и принесут, несомненно, много новых неожиданных результатов.

В настоящее время можно подвести предварительные итоги лишь по некоторым, более других исследованным направлениям. К таким направлениям относятся:

- Расчеты устойчивости и запасов устойчивости для различных объектов и систем управления, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений различных порядков.
- Численное решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.
- Обобщенная задача о собственных значениях, т.е. вычисление собственных значений системы линейных однородных уравнений с параметром для тех случаев, когда часть уравнений параметра не содержит.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров Ю.П. Синтез оптимальных систем управления при не полностью известных возмущающих силах. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1987.
2. Петров Ю.П. Устойчивость линейных систем при вариациях параметров // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 11. – С. 186-189.
3. Петров Ю., Петров Л. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. – СПб.: Изд-во БХВ–Петербург, 2005.