УДК 517

З.К.ИМАНАЛИЕВ, Б.Ы.АШИРБАЕВ, Ж.А.АЛЫМБАЕВА

E-mail: ksucta@elcat.kg.

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТРИЧНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ

Илимий макалада көрсөткүчү квадраттык матрица болгон экспонентаны болжолдуу эсептөөнүн формуласы чыгарылды жана бул формула менен эсептөө туруктуу болоору далилденди.

В данной статье выведена формула приближенного вычисления матричной экспоненты и доказана устойчивость вычисления по этой формуле.

In given article the formula of the approached calculation matrix exhibitors is deduced and stability of calculation proved by this formula

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = Ax(t), \quad x \in \mathrm{R}^n \tag{1}$$

где $A-$ постоянная матрица размера $n \times n$.

Известно, что матрица $X(t) = e^{At}$ является решением матричной задачи Коши

$$\dot{X} = AX, \quad X(0) = E,$$

(2)

т.е. является фундаментальной матрицей системы (1), из этого свойства следует, что решение $x(t)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(0)$, определяется выражением

$$x(t) = e^{At}x(0). \tag{3}$$

Таким образом, задача нахождения решений системы уравнений (1) эквивалентна задаче отыскания матрицы e^{At} по матрице A.

При $t = h$ из (3) будем иметь

$$x(h) = \left(E + Ah + \frac{A^2h^2}{2!} + \ldots\right)x(0).$$

(4)

Полагая теперь, что начальное условие задано в точке $t = h$, вычислим решение (4) в точке $t = 0$:

$$x(0) = \left(E - Ah + \frac{A^2h^2}{2!} - \frac{A^3h^3}{3!} + \ldots\right)x(h).$$

(5)

Если ограничиться первыми 7 членами ряда e^{At}, то из (4) и (5) получим:

$$(120E - 60Ah + 12A^2h^2 - A^3h^3)\times$$

$$\times\left[x(h) - (120E - 60Ah + 12A^2h^2 - A^3h^3)^{-1}(120E + 60Ah + 12A^2h^2 + A^3h^3)x(0)\right] + \frac{3}{2}A^2h^2(12E - 6Ah + A^2h^2)\times$$

$$\times\left[x(h) - (12E - Ah + A^2h^2)^{-1}(12E + 6Ah + A^2h^2)x(0)\right] + A^4h^4(E - \frac{Ah}{2})^{-1}\times$$

$$\times\left[x(h) - (E - \frac{Ah}{2})^{-1}(E + \frac{Ah}{2})x(0)\right] + \ldots = 0.$$

(6)

Введем обозначения:

$$r_1 = \frac{3}{2}\max_{0<h\le h_0}\frac{\left\|A^2\left(12E - 6Ah + A^2h^2\right)\right\|}{\left\|120E - 60Ah + 12A^2h^2 - A^3h^3\right\|}$$

$$r_2 = \max_{0<h\le h_0}\frac{\left\|A^4\left(E - \frac{Ah}{2}\right)\right\|}{\left\|120E - 60Ah + 12A^2h^2 - A^3h^3\right\|}$$

(7)

В работе /1/ доказано, что

$$\left\|x(h) - (E - \frac{Ah}{2})^{-1}(E + \frac{Ah}{2})x(0)\right\| = O(h^3),$$

(8)

$$\left\|x(h) - (12E - 6Ah + A^2h^2)^{-1}(12E + 6Ah + A^2h^2)x(0)\right\| = O(h^5).$$

Тогда с учетом (7) и (8) из (6) получим:

$$\left\|x(h) - (120E - 60Ah + 12A^2h^2 - A^3h^3)^{-1}(120E + 60Ah + 12A^2h^2 + A^3h^3)x(0)\right\| \le$$

$$\le r_1h^2\left\|x(h) - (12E - 6Ah + A^2h^2)^{-1}(12E + 6Ah + A^2h^2)x(0)\right\| +$$

$$+r_2 h^4 \left\| x(h) - (E - \frac{Ah}{2})^{-1}(E + \frac{Ah}{2})x(0) \right\| \le \frac{r_2}{r_1} C_1 h^7 + \frac{r_3}{r_1} C_2 h^7 = Ch^7,$$

(9)

где $C = r_1 C_1 + r_2 C_2$.

Это означает, что ошибка в определении $x(h)$ будет иметь порядка $O(h^7)$.

Итак, нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Формула

$$x(h) = \left[120E - 60Ah + 12A^2h^2 - A^3h^3\right]^{-1}\left[120E + 60Ah + 12A^2h^2 + A^3h^3\right]x(0)$$

(10)

аппроксимирует решение уравнения (1) в точке $t = h$ с точностью до величин $O\left(h^7\right)$.

Поскольку формула (7) содержит обратную матрицу, необходимо убедиться в том,что это матрица – неособенная.

Известно /1/, что если все характеристические числа матрицы имеют отрицательные вещественные части, то эта матрица считаются устойчивой. О связи с устойчивой и неособенной матриц имеем следующий факт.

ТЕОРЕМА 2. Если $A-$ устойчивая матрица, т. е.

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0 \;\; i = \overline{1,n}, \tag{11}$$

то матрица $P = Q\left[120E - 60Ah + 12A^2h^2 + A^3h^3\right]Q^{-1}$ – неособенная при любом $h > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой, о треугольной матрице /1/. Пусть $A = QTQ^{-1}$, где T – треугольная матрица. Тогда матрица P преобразуется к виду

$$\widetilde{P} = Q\left[120E - 60Ah + 12A^2h^2 + A^3h^3\right]Q^{-1}.$$

Диагональными элементами матрицы $\widetilde{P}$ являются собственные числа матрицы P, равные

$$\widetilde{\lambda}_i = 120 - 60\lambda_i h + 12\lambda_i^2 h^2 - \lambda_i^3 h^3.$$

Так как по условию при любом i $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, то все $\widetilde{\lambda}_i$ имеют вещественные положительные части, следовательно, матрица P является неособенной. Более того, она положительно определенная матрица.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $A-$ неустойчивая матрица, то, могут существовать такие значения h, при которых обращение в формуле (7) не существует. Однако в этом случае всегда можно выбрать достаточно малое h с тем, чтобы матрица P имела обратную. Это следует из того, что $\lim\limits_{h\to 0}\left[120E - 60Ah + 12A^2h^2 - A^3h^3\right] = 120E.$

Отсюда вытекает необходимость рассмотрения вопроса устойчивости вычислений. Вычисления по формуле (10) можно считать устойчивыми, если все характеристические числа матрицы А располагаются внутри единичного круга комплексной плоскости /2/. В случае, когда выполняются условия (11), имеет место

ТЕОРЕМА 3. Если $A -$ устойчивая матрица, то все характеристические числа матрицы

$$N = \left[120E - 60Ah + 12A^2h^2 - A^3h^3\right]^{-1}\left[120E + 60Ah + 12A^2h^2 + A^3h^3\right]$$

по модулю меньше единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме о треугольной форме матрицы, если $A = QTQ^{-1}$, то $T -$ треугольная матрица, все элементы которой, расположенные под главной диагональю, равны нулю, а на диагонали размещены собственные числа матрицы A.

Подставляя матрицу A в формулу (7) и воспользовавшись формулами

$$QEQ^{-1} = E, \quad (QTQ^{-1})^{-1} = QT^{-1}Q^{-1},\ (QTQ^{-1})^2 = QT^2Q^{-1},\ (QTQ^{-1})^3 = QT^3Q^{-1},$$

получим

$$\widetilde{N} = Q\left[120E - 60Th + 12T^2h^2 - T^3h^3\right]^{-1}\left[120E + 60Th + 12T^2h^2 + T^3h^3\right].$$

Так как матрица T – треугольная, матрицы $\left[120E - 60Th + 12T^2h^2 - T^3h^3\right]$ и $\left[120E + 60Th + 12T^2h^2 + T^3h^3\right]$ также будут треугольными.

Теперь рассмотрим матрицу $\left[120E - 60Th + 12T^2h^2 - T^3h^3\right]^{-1}$. Она будет треугольной как обращение треугольной матрицы, а элементами ее главной диагонали являются обратные величины собственных чисел матрицы $\left[120E - 60Th + 12T^2h^2 - T^3h^3\right]$. Следовательно,

$$\left[120E - 60Th + 12T^2h^2 - T^3h^3\right]^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{120 - 60\lambda_1 h + 12\lambda_1^2h^2 - \lambda_1^3h^3} & * & \dots & * \\ 0 & \dfrac{1}{120 - 60\lambda_2 h + 12\lambda_2^2h^2 - \lambda_2^3} & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{1}{120 - 60\lambda_n h + 12\lambda_n^2h^2 - \lambda_n^3h^3} \end{pmatrix}$$

(здесь через * обозначены, возможно, ненулевые элементы матрицы). Отсюда сразу следует, что на диагонали треугольной матрицы (она получается при умножении двух треугольных матриц) расположены числа

$$\widetilde{\lambda}_i = \frac{120 + 60\lambda_i h + 12\lambda_i^2h^2 + \lambda_i^3h^3}{120 - 60\lambda_i h + 12\lambda_i^2 - \lambda_i^3h^3}.$$

(12)

В силу того, что все характеристические числа λ_i имеют отрицательные вещественные части, все числа $\widetilde{\lambda}_i$ по модулю меньше единицы для любого $h > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976. – 424 с.

2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970.