УДК 517. 962.2, 519. 876.2

Г.А. КАЛДЫБАЕВА, А.ДЖ.САТЫБАЕВ

E-mail: ksucta@elcat.kg.

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ С ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Макалада коюлган маселе ченем айрыма усулу жардамында чыгарылган.

В статье поставленная задача решена конечно-разностным методом.

In article the task is solved by method of finite differences.

1.4. Конечно-разностное решение

Вычислим следующие значения решения задачи, которые необходимы в дальнейшем:

$$\left.\left.\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right|_{|\alpha|=t} = S_y(t,y), \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right|_{|\alpha|=t} = S_t(t,y) + R(t,y), \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}\right|_{|\alpha|=t} = -sign(\alpha)R(t,y), \quad \right\} \tag{10}$$

Приближенное решение задачи (1.9) будем строить конечно-разностным методом и для этого введем равномерную сеточную область, разностные отношения и обозначения и в дальнейшем для сокращения обозначений индексы i, j, k в решении разностной схемы будем опускать или частично опускать, например:

$$V_{\bar{\alpha}}(i,\, j,\, k) = V_{\bar{\alpha}}, \;\; V_{\bar{t}}(i,\, j), \;\; V_{\bar{y}}(k,\, j+1) = \frac{V_{ij+1}^{k} - V_{ij}^{k}}{h_2}, \tag{11}$$

$$V(k,\, j-1) = V_{ij-1}^{k}, \;\; V_{\bar{y}}(i, k-1) = \frac{V_{ij}^{k-1} - V_{ij-1}^{k-1}}{h_2}, \tag{12}$$

$$V_{\bar{t}}\,(i,\, j) = \frac{V_{ij}^{k} - V_{ij}^{k-1}}{\tau}, \; V_{\alpha}(i, j, k+1) = \frac{V_{i+1j}^{k+1} - V_{ij}^{k+1}}{h_1} \text{ и т.д.} \tag{13}$$

Предположим, что решение задачи (9) - достаточно гладкая функция для применения разностной схемы.

Заменим дифференциальную задачу (9) разностной задачей, отбрасывая малые члены порядка $O\left(h_1^2, h_2^2, \tau^2\right)$:

$$\left.\begin{aligned}
&V_{t\bar{t}} = V_{\alpha\bar{\alpha}} + LV_{ij}^k, \quad (ih_{1,}\ jh_2,\ \tau k) \in \Omega_{ij}^k, \\
&V_{\pm i,j}^{|2i|} = S_j^{|2i|}, \quad i = \overline{-N, N}; \ \ j = \overline{-L, L}; \\
&V_{i,L}^k = V_{i,-L}^k = 0, \quad \ i = \overline{-N, N}; k = \overline{|2i|, 2N};
\end{aligned}\right\}$$

(14)

где $LV_{ij}^k = \left(\dfrac{\hat{a}}{\tilde{n}}\right)_{ij}\left[\Delta\alpha_{ij} V_{\overset{0}{\alpha}} - P[\Psi_{ij}^k]\right]$, $\tilde{n}_{ij}, \Delta\alpha_{ij},\ \hat{a}_{ij},\ S_j^k -$ разностные аналоги функции $\tilde{n}(\alpha, y), \Delta\alpha, \hat{a}(\alpha, y), S(t, y) -$ соответственно, а индекс $\pm i$ соответствует направлению координат. Введем обозначение и норму

$$\Pi_5 = \max_{i=-N,N}\ \max_{j=-L,L}\left\{\left|\hat{a}_{ij}\right|\right\}, \quad \Pi_6 = \max_{i=-N,N}\ \max_{j=-L,L}\left\{\left|\Delta\alpha_{ij}\right|\right\}, \ \Pi_7 = \min_{i=-N,N}\ \min_{j=-L,L}\left\{\left|\hat{a}_{ij}\right|\right\},$$

$$\Pi_8 = \min_{i=-N,N}\ \min_{j=-L,L}\left\{\left|\Delta\alpha_{ij}\right|\right\}, \quad \Pi_9 = \max_{i=-N,N}\ \max_{j=-L,L}\left\{\left|c_{ij}\right|\right\}, \quad \Pi_{10} = \min_{i=-N,N}\ \min_{j=-L,L}\left\{\left|c_{ij}\right|\right\},$$

$$\Pi_{11} = \max_{i=-N,N}\ \max_{j=-L,L}\ \max_{k\le i}\left\{\left|P(\Psi^k{}_{ij})\right|\right\}, \qquad \left\|V\right\|^2(i,k) = h_1 h_2 \sum_{j=-L+1}^{L-1}\ \sum_{i=-N+2}^{N-2} (V_{ij}^k)^2.$$

Каждый член сеточного уравнения (14) умножим на $\left(V_t + V_{\bar{t}}\right)$ и получим следующий дискретный аналог дифференциального произведения:

$$\begin{aligned}
&V_{t\bar{t}}\left(V_t + V_{\bar{t}}\right) = \left[V_{\bar{t}}^2(k)\right]_{t,} \\
&V_{\alpha\bar{\alpha}}\left(V_t + V_{\bar{t}}\right) = \left[V_\alpha\left(V_t + V_{\bar{t}}\right)\right]_\alpha - \left[V_t + V_{\bar{t}}\right]_\alpha V_{\bar{\alpha}}(i+1) = \\
&= \left[V_\alpha\left(V_t + V_{\bar{t}}\right)\right]_\alpha - \left[V_\alpha^2\right]_t + \left[\left(V_\alpha V_{\bar{t}\alpha}\right)(k+1) - \left(V_\alpha V_{\bar{t}\alpha}\right)(k)\right],
\end{aligned}$$

$$(\frac{b}{c})_{ij}\Delta\alpha_{ij} V_{\overset{0}{\alpha}}\left[V_t + V_{\bar{t}}\right] = (\frac{b}{c})_{ij}\Delta\alpha_{ij} V_{\overset{0}{\alpha}}\left[V_t + V_{\bar{t}}\right], \quad (\frac{b}{c})_{ij} * P[\Psi_{ij}^k] * [V_t + V_{\bar{t}}].$$

Умножая все вышеполученные на $\tau h_1 h_2$, просуммировав по индексам $j = \overline{-L+1, L-1}$; $i = \overline{-N+2, N-2}$; $k = \overline{|2i|+3, 2N-1}$ и используя введенные обозначения, имеем

$$\tau\ \ h_{11} h_2 \sum_{j=-L+1}^{L-1}\ \sum_{i=-N+2}^{N-2}\ \sum_{k=|2i|+3}^{2N-1}\left[V_{t\bar{t}}\left(V_t + V_{\bar{t}}\right)\right] = \left\|V_{\bar{t}}\right\|^2(i, 2N) - \left\|V_{\bar{t}}\right\|^2\left(i, |2i| + 3\right)$$

$$\tau\ h_1 h_2 \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} \sum_{k=|2i|+3}^{2N-1} \left[V_\alpha^2\right]_t = \|V_\alpha\|^2 (i,2N) - \|V_\alpha\|^2 (i,|2i|+3),$$

$$\tau\ h_1 h_2 \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} \sum_{k=|2i|+3}^{2N-1} \left\{\left[V_\alpha\left(V_t + V_{\bar t}\right)\right](i+1,k) - \left[V_\alpha\left(V_t + V_{\bar t}\right)\right](i,k)\right\} \tfrac{1}{h_1} =$$

$$= \frac{\tau}{h_1}\left[\ \rangle\sum_{i=0}^{-N+2} - \left\|V_\alpha\left(V_t + V_{\bar t}\right)\right\|(i,|2i|+3) - \ \rangle\sum_{i=0}^{-N+3}\left\|V_\alpha\left(V_t + V_{\bar t}\right)\right\|(i,|2i|+4) + \right.$$

$$\left. + \ \rangle\sum_{i=-N+2}^{-1}\left\|V_\alpha\left(V_t + V_{\bar t}\right)\right\|(i,|2i|+1) + \ \rangle\sum_{i=1}^{N-2}\left\|V_\alpha\left(V_t + V_{\bar t}\right)\right\|(i,|2i|+2)\right] \le \|\Gamma\|_1^2 (i,|2i|+3)\ .$$

Здесь символ $\rangle\sum\limits_{i=\nu_1}^{\nu_2}$ означает, что суммирование в норме осуществляется по i от ν_1 до ν_2 на характеристиках и

$$\|\Gamma\|_1^2 (i,|2i|+3) = \frac{\tau}{h_1}\left\{\ \rangle\sum_{i=0}^{-N+2}\left(\left\|V_{\bar\alpha}\right\|^2 + \left\|V_{\bar t}\right\|^2\right)(i,|2i|+2) + \right.$$

$$+ \ \rangle\sum_{i=0}^{-N+3}\left(\left\|V_{\bar\alpha}\right\|^2 + \left\|V_{\bar t}\right\|^2\right)(i,|2i|+4) + \ \rangle\sum_{i=-N+2}^{-1}\left(\left\|V_{\bar\alpha}\right\|^2 + \left\|V_{\bar t}\right\|^2\right)(i,2i+1) +$$

$$\left. + \ \rangle\sum_{i=1}^{N-2}\left(\left\|V_{\bar\alpha}\right\|^2 + \left\|V_{\bar t}\right\|^2\right)(i,|2i|+3)\right\}\ .$$

– Раскроем

$$\tau\, h_1 h_2 \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+1}^{N-2} \sum_{k=|2i|+3}^{2N-1} \left[\left(V_\alpha V_{\bar t\alpha}\right)(i,k+1) - \left(V_\alpha V_{\bar t\alpha}\right)(i,k)\right] =$$

$$= \tau\, h_1 h_2 \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} \left[\left(V_\alpha V_{\bar t\alpha}\right)(i,2N) - \left(V_\alpha N_{\bar t\alpha}\right)(i,|2i|+3)\right] =$$

$$= \frac{\tau\, h_1 h_2}{h_1} \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} \left\{V_\alpha(i,2N)\left[V_{\bar t}(i+1,2N) - V_{\bar t}(i,2N)\right] - \right.$$

$$\left. - V_\alpha(i,|2i|+3)\left[V_{\bar t}(i+1,|2i|+3) - V_{\bar t}(i,|2i|+3)\right]\ \right\}\ .$$

Оценим каждый член последнего равенства

$$\frac{\tau h_1 h_2}{h_2} \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} \left\{V_\alpha(i,2N)\left[V_{\bar t}(i+1,2N) - V_{\bar t}(i,2N)\right]\right\} \le$$

$$\le \frac{\tau h_1 h_2}{h_1} \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} \left\{\left|V_\alpha(i,2N)\right|\left[\left|V_{\bar t}(i+1,2N)\right| + \left|V_{\bar t}(i,2N)\right|\right]\right\} \le$$

$$\le \frac{\tau h_1 h_2}{h_1} \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} \left[\left|V_\alpha\right|^2 (i,2N) + \left|V_{\bar t}\right|^2 (i,2N) \right] \le \frac{\tau}{h_1} \left[\left\|V_\alpha\right\|^2 + \left\|V_{\bar t}\right\|^2 \right] (i,2N),$$

$$\frac{\tau h_1 h_2}{h_1} \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} \left\{ V_\alpha (i,|2i|+3) \left[V_{\bar t}(i+1,|2i|+3) - V_{\bar t}(i,|2i|+3) \right] \right\} \le \frac{\tau}{h_1} \left[\left\|V_\alpha\right\|^2 + \left\|V_{\bar t}\right\|^2 \right] (i,|2i|+3).$$

Оценим следующее выражение

$$\tau\ h_1 h_2 \sum_{j=-L+1}^{L-1} \sum_{i=-N+2}^{N-2} \sum_{k=|2i|+3}^{2N-1} \left[P(\Psi_{ij}^k) * \left(V_t + V_{\bar t}\right) \right] \le \ddot{I}_{\ 11} * \tau\ h_1 h_2 [\|V\|(i,2N) - \|V\|(i,|2i|+3)].$$

В силу вышеполученных оценок из уравнения (14) следует:

$$\left(\left\|V_{\bar t}\right\|^2 + \left\|V_\alpha\right\|^2 \right)(i,2N) \le \left(\left\|V_{\bar t}\right\|^2 + \left\|V_\alpha\right\|^2 \right)(i,|2i|+3) + \|\tilde{A}\|_1^2 (i,|2i|+3) + \frac{\tau}{h_1} \left[\left\|V_\alpha\right\|^2 + \left\|V_{\bar t}\right\|^2 \right] (i,|2i|+3)$$

$$+ \frac{\Pi_5}{\Pi_{10}} \Pi_6 \left[\left\|V_\alpha\right\|^2 + \frac{\tau}{h_1} \left\|V_{\bar t}\right\|^2 \right] (i,|2i|+3) + \ddot{I}_{\ 11} * \tau\ h_1 h_2 [\|V\|(i,2N) - \|V\|(i,|2i|+3)]$$

Собирая одинаковые нормы, имеем

$$\left\|V_{\bar t}\right\|^2 (i,2N) + \left\|V_\alpha\right\|^2 (i,2N) \le \|\Gamma\|_1^2 (i,|2i|+3) + \left[1 + \frac{\tau}{h_1} + \frac{\tau}{h_1} \frac{\ddot{I}_5 \ddot{I}_6}{\ddot{I}_{10}} \right] \left\|V_{\bar t}\right\|^2 (i,|2i|+3) + \left[1 + \frac{\tau}{h_1} + \frac{\ddot{I}_5 \ddot{I}_6}{\ddot{I}_{10}} \right] \left\|V_\alpha\right\|^2 (i,|2i|+3) +$$

$$+ [\frac{\ddot{I}_5 \ddot{I}_6}{\ddot{I}_{10}} \tau] \sum_{k=/2i/+3}^{2N} \|V\|_1^2 (i,k) + \ddot{I}_{\ 11} * \tau\ h_1 h_2 [\|V\|(i,2N) - \|V\|(i,|2i|+3)].$$

(15)

где $\|V\|_1^2 (i,k) = \left(\left\|V_{\bar t}\right\|^2 + \left\|V_\alpha\right\|^2 \right)(i,k).$

Учитывая последнее, из (15) получим

$$\|V\|_1^2 (i,2N) \le \|\Gamma\|_1^2 (i,|2i|+3) + P_3 \|V\|_1^2 (i,|2i|+3) + \tau P_4 \sum_{k=|2i|+3}^{2N-1} \|V\|_1^2 (i,k), \qquad (16)$$

здесь $P_3 = \max \left\{ \left[1 + \frac{\tau}{h_1} + \frac{\prod_5 \prod_6}{\prod_{10}} \right], \left[1 + \frac{\tau}{h_1} + \frac{\prod_5 \prod_6}{\prod_{10}} \right] \right\}, \qquad P_4 = \left[\frac{\prod_5 \prod_6}{\prod_{10}} \right].$

В силу равенства $V(i,2N) = V(i,|2i|+3) + \tau \sum_{k=|2i|+4}^{2N} V_{\bar t}(i,k)$ получим неравенства

$$\|V\|^2 (i,2N) \le \|V\|^2 (i,|2i|+3) + 2\|V\|(i,|2i|+3) + \tau \sum_{k=/2i/+4}^{2N} \left\|V_{\bar t}\right\|(i,k) +$$

$$+\left[\tau\sum_{k=|2i|+4}^{2N}\left\|V_{\bar t}\right\|(i,k)\right]^2 \le 2\|V\|^2(i,|2i|+3)+4N\tau^2\sum_{k=|2i|+4}^{2N}\|V_t\|^2(i,k).$$

Таким образом, усиливая оценки, из последнего неравенства получим

$$\|V\|^2(i,2N)\le 2\|V\|^2(i,|2i|+3)+4N\tau^2\sum_{k=|2i|+4}^{2N}\left\|V_{\bar t}\right\|^2(i,k). \tag{17}$$

Из неравенств (16) и (17) имеем

$$\|V\|_2^2(i,2N)\le\|\Gamma\|_1^2(i,|2i|+3)+P_3\|V\|_1^2(i,|2i|+3)+$$
$$+(2+\Pi_{11})*\left\|V_{\bar t}\right\|^2(i,|2i|+3)+\left[\tau P_4+(1+\Pi_{11})+4N\tau^2\right]\sum_{k=|2i|+3}^{2N}\left\|V_{\bar t}\right\|_2^2(i,k), \tag{18}$$

где $\|V\|_2^2(i,k)=\|V\|_1^2(i,k)+\|V\|^2(i,k).$

Используя дискретный аналог неравенства Гронуолла-Беллмана, из (18) имеем

$$\|V\|_2^2(i,2N)\le P_5\left[\|\Gamma\|_2^2(i,|2i|+3)+\|V\|_2^2(i,|2i|+3)\right]\exp\left[\left(\tau P_4+(1+Ï_{11})+4N\tau^2\right)t\right],$$

$$P_5=\max\{(2+Ï_{11}),P_3,1\}. \tag{19}$$

Если считать, что υ_{ij}^k – точное сеточное решение задачи (14), т.е. с малыми членами $O(h_1^2+h_2^2+\tau^2)$, то и для υ_{ij}^k также можно получить оценку (19), но с малым членом $O(h_1^2+h_2^2+\tau^2)$.

Следовательно,

$$\|\vartheta-V\|(i,2N)\le P_6(5\tau^2+h_2^2),\qquad h_1=2\tau,$$
ãäå $$P_6=\exp\left\{P_4T^2+2T^3\right\}\|\vartheta\|_{C^4(\Omega(T,D))}\big/12. \tag{20}$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 3. Пусть выполнены (4)-(5) и решение задачи (9) существует и имеет непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно в области $\Omega(T,D)$ и выполнены условия (12), (13), (6). Тогда существует $C_1>0$ такое, что при $\tau/h_2<C_1$ решение конечно-разностной задачи (14) сходится к точному решению (9) со скоростью порядка $O(h_1^2+h_2^2+\tau^2)$ в

классе $W_2^1(\Omega(T,D))$ и справедлива оценка (20). Коэффициент C_1 зависит только от нормы коэффициентов уравнения.

Из эквивалентности задач (9) и (1)-(3) следует, что приближенное конечно-разностное решение задачи (14) также сходится к точному решению (1)-(3) со скоростью порядка $\hat{I}\ (h_1^2+h_2^2+\tau^2)$ в классе $W_2^1(\Omega(T,D))$, где h – шаг по x, при выполнении условии теоремы 3.