УДК 681.5

*Т.Т.ОМОРОВ, Р.Н.КУРМАНАЛИЕВА, Б.О.ДЖОЛДОШЕВ*

*E-mail: ksucta@elcat.kg.*

# ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

*Макалада сызыктуу, туруктуу эмес көп өлчөмдүү башкаруу системасын куруда динамикалык гарантиялоо принциби колдонулду. Бул принцип регулятордун параметрлерин берилген алгачкы инженердик сапаттык көрсөткүчтөрү менен аныктап, башкарууну камсыз кылат.*

*Разработан новый подход к синтезу систем управления линейными нестационарными многомерными объектами на основе принципа гарантируемой динамики. Подход позволяет определить параметры регулятора по исходным инженерным требованиям к точности и быстродействию проектируемой системы.*

*The new approach to synthesis of control systems by linear non-stationary multidimensional objects on the basis of principle of guaranteed dynamics is developed. The approach allows defining parameters of regulator under basic engineering requirements to accuracy and speed of projected system.*

**Введение.** При проектировании систем автоматического управления (САУ) на основе принципа гарантируемой динамики /1/ в некотором целевом пространстве системы управления исходя из технических и технологических требований задается некоторая допустимая область для управляемых процессов. Структура и параметры искомой системы отыскиваются так, чтобы переходные процессы, вызванные действием внешних задающих и возмущающих воздействий, не выходили за пределы заданных допустимых областей. Такой подход к синтезу САУ является более естественным, так как позволяет непосредственно учитывать инженерные требования к проектируемой системе, в частности, такие требования, как точность и быстродействие. Границы этих областей задаются инженерными показателями качества.

**Постановка задачи.** Рассмотрим нестационарный объект управления, описываемый векторным уравнением в отклонениях:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t)=\widehat{A}(t)x(t)+\widehat{B}(t)u(t),\\ &x(t_0)=x^0, \quad t\in[t_0,t_k], \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t)=[x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)]^T-$ вектор состояния; $u(t)=[u_1(t),u_2(t),\ldots,u_m(t)]^T-$ вектор управления; $\widehat{A}(t)$, $\widehat{B}(t)-$ вещественные матрицы:

$$\widehat{A}(t)=\left\{\widehat{a}_{ij}(t)\right\}_{nxn}, \qquad \widehat{B}(t)=\left\{\widehat{b}_{il}(t)\right\}_{mxn};$$

$t_0, t_k$ – начальный и конечный моменты управления.

Допустим, что объект управления обладает свойством управляемости, а вектор состояния доступен для измерения.

Предположим, что для элементов матрицы $\widehat{A}(t), \widehat{B}(t)$ известны их максимальные $\widehat{a}_{ij}^{+}$, $\widehat{b}_{il}^{+}$ и минимальные $\widehat{a}_{ij}^{-}$, $\widehat{b}_{il}^{-}$ значения:

$$\widehat{a}_{ij}^{+}=\max_{t\in[t_0,t_k]}\widehat{a}(t)_{ij}, \qquad \widehat{a}_{ij}^{-}=\min_{t\in[t_0,t_k]}\widehat{a}(t)_{ij}, \qquad i,j=\overline{1,n},$$

$$\widehat{b}_{il}^{+}=\max_{t\in[t_0,t_k]}\widehat{b}(t)_{il}, \qquad \widehat{b}_{il}^{-}=\min_{t\in[t_0,t_k]}\widehat{b}(t)_{il}, \qquad 1=\overline{1,m}.$$

Тогда матрицы $\widehat{A}(t)$, $\widehat{B}(t)$ можно представить в виде суммы постоянных $A=\left\{a_{ij}\right\}_{n\times n}$, $B=\left\{b_{il}\right\}_{m\times n}$ и переменных $\widetilde{A}(t)=\left\{\widetilde{a}_{ij}(t)\right\}_{n\times n}$, $\widetilde{B}(t)=\left\{b_{il}(t)\right\}_{m\times n}$ матриц:

$$\widehat{A}(t)=A+\widetilde{A}(t)=\left\{\widehat{a}_{ij}(t)\right\}_{n\times n}, \qquad \widehat{B}(t)=B+\widetilde{B}(t)=\left\{b_{il}(t)\right\}_{n\times m}, \tag{2}$$

где

$$a_{ij}=\frac{\widehat{a}_{ij}^{+}+\widehat{a}_{ij}^{-}}{2}, \quad b_{il}=\frac{\widehat{b}_{il}^{+}+\widehat{b}_{il}^{-}}{2}, \qquad 1=\overline{1,m}, \qquad i,j=\overline{1,n}.$$

При этом для элементов матрицы $\widehat{A}(t)$, $\widehat{B}(t)$ справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} &\left|\widetilde{a}_{ij}(t)\right|\le a_{ij}^{+}, \quad i,j=\overline{1,n}, \\ &\left|\widetilde{b}_{il}(t)\right|\le b_{il}^{+}, \quad 1=\overline{1,m}, \end{aligned} \tag{3}$$

где положительные величины

$$\widetilde{a}_{ij}(t)=\widehat{a}_{ij}(t)-a_{ij}, \quad \widetilde{b}_{il}(t)=\widehat{b}_{il}(t)-b_{il}.$$

Теперь исходное уравнение объекта (1) с учетом представления (2) имеет вид

$$\dot{x}(t)=\left[A+\widetilde{A}(t)\right]\cdot x(t)+\left[B+\widetilde{B}(t)\right]\cdot u(t). \tag{4}$$

Поскольку уравнение объекта задано в отклонениях, вектор ошибки управления

$$e(t)=-x(t).$$

Пусть задана структура закона управления:

$$u(t)=Ke(t)=-K\,x(t), \tag{5}$$

где $K-m\times n-$ мерная матрица регулятора:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{mn} \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $p$ вектор-параметр регулятора, имеющий размерность $r = m \times n$:

$$p = [p_{1,} p_2, ..., p_r] = [k_1, k_2, ..., k_m].$$

Предположим, что требования к качеству системы управления заданы в виде следующих ограничений на переходные процессы $e_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, обусловленные не нулевым начальным условием ($e(t_0) \neq 0$, где 0 – n-мерный нулевой вектор, все элементы которого равны нулю):

$$\begin{gathered} |e_i(t)| = |x_i(t)| \le б_i(t), \\ t \in [t_0, t_k], \quad i = \overline{1,N}, \end{gathered} \tag{6}$$

где $б_i(t)$ – положительные непрерывно дифференцируемые функции, задающие границы соответствующих допустимых областей:

$$E_i(t) = \{ e_i \in R^1 : \ |e_i(t)| \le б_i(t) \},$$
$$i = \overline{1,N}, \quad t \in [t_0, t_k].$$

При этом допустимое подмножество для вектора $e(t)$ запишется как

$$E(t) = \{ e \in R^n : \ e_i(t) \in E_i(t), \quad i = \overline{1,n} \}.$$

Введем подмножество

$$P = \{ p \in R^r : \ e_i(t) \in E_i(t), \ i = \overline{1,N} \},$$

определяющее допустимую область в пространстве параметров проектируемой системы.

Задача синтеза формулируется следующим образом. Определить вектор-параметр p закона управления (5) для объекта, описываемого уравнением (4) так, чтобы $p \in P$.

**Решение задачи синтеза.** Рассмотрим возможность решения сформулированной задачи на основе принципа гарантируемой динамики /1, 2/. Сформулированная задача синтеза решается в два этапа: на первом осуществляется описание допустимого подмножества $P$, а на втором этапе производится поиск и определение искомого вектор-параметра $p \in P$.

**Теорема 1.** Пусть в начальный момент времени $e_i(t_0) \in E_i(t_0)$. Тогда для того, чтобы при $t > t_0$ $e_i(t) \in E_i(t)$ достаточно для всех $t \in [t_0, t_k]$ выполнения соотношения

$$\int_{t_0}^{t} e_i(\tau)\, \dot{e}_i(\tau) d\tau \le \int_{t_0}^{t} б_i(t)\, \dot{б}_i(t) d\tau, \qquad t \in [t_0, t_k]. \tag{7}$$

На основе условий (7) можно сформулировать следующую теорему /2/.

**Теорема 2.** Пусть $e(t_0) \in E(t_0)$. Тогда вектор ошибки управления $e(t) \in E(t)$, если выполняются условия

$$\begin{aligned} \dot{e}_i^{+}(t) &\le \dot{б}_i(t), \\ -\dot{e}_i^{-}(t) &\le \dot{б}_i(t), \qquad i=\overline{1,N}, \quad t \in [t_0, t_k], \end{aligned} \tag{8}$$

где $\dot{e}_i^{+}(t) = \dot{e}_i(t)\Big|_{e_i(t)=б_i(t)}$; $\dot{e}_i^{-}(t) = \dot{e}_i(t)\Big|_{e_i(t)=-б_i(t)}$.

Для описания подмножества $P$ будем использовать результаты теоремы 2. Для этой цели с учетом уравнения объекта (1) и закона управления (5) векторное уравнение замкнутой САУ запишем в виде:

$$\dot{x}(t) == D \cdot x(t) + \widetilde{D}(t) \cdot x(t), \tag{9}$$

где матрицы $D = A - BK$, $\widetilde{D}(t) = \widetilde{A}(t) - \widetilde{B}(t) \cdot K$,

$$d_{ij} = a_{ij} - \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{il}k_{lj}, \quad \widetilde{d}_{ij}(t) = \widetilde{a}_{ij}(t) - \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \widetilde{b}_{il}(t)k_{lj}. \tag{10}$$

В координатной форме уравнение (9) можно записать в виде

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \widetilde{d}_{ij}(t) \cdot x_j(t), \quad t \in [t_0, t_k], \qquad j = \overline{1,n}. \tag{11}$$

Задача состоит в получении условий, при выполнении которых процессы $x_i(t) \in E_i(t)$, $i = \overline{1,n}$.

Уравнение замкнутой системы (11) относительно ошибки управления имеет вид

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \cdot e_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \widetilde{d}_{ij}(t) \cdot e_j(t), \quad t \in [t_0, t_k], \quad j = \overline{1,n}. \tag{12}$$

На основе теоремы 2 имеем, что

$$\dot{e}_i^{+}(t) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}e_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \widetilde{d}_{ij}(t)e_j(t)\Big|_{e_j(t)=б_i(t)} = \left[d_{ii} + \widetilde{d}_{ii}(t)\right]б_i(t) + \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} d_{ij}e_j(t) + \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \widetilde{d}_{ij}(t)e_j(t),$$

$$\dot{e}_i^{-}(t) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}e_j(t) + \sum_{j=1}^{n} \widetilde{d}_{ij}(t)e_j(t)\Big|_{e_i(t)=-б_i(t)} = \left[d_{ii} + \widetilde{d}_{ii}(t)\right]б_i(t) - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} d_{ij}e_j(t) - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \widetilde{d}_{ij}(t)e_j(t).$$

Тогда соотношения (8) можно записать в виде:

$$\left[d_{ii} + d_{ii}(t)\right]б_i(t) + \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} d_{ij}e_j(t) + \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \widetilde{d}_{ij}(t)\, e_j(t) \le \dot{б}_i(t),$$

$$\left[d_{ii}+\tilde{d}_{ii}(t)\right]б_i(t)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} d_{ij}e_j(t)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\tilde{d}_{ij}(t)e_j(t)\le\dot{б}_i(t).$$

В результате условия (8) имеют вид:

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} d_{ij}e_j(t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\tilde{d}_{ij}(t)б_j(t)\le\dot{б}_i(t)-\left[d_{ii}+\tilde{d}_{ii}(t)\right]$$

$$-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} d_{ij}e_j(t)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\tilde{d}_{ij}(t)б_j(t)\le\dot{б}_i(t)-\left[d_{ii}+\tilde{d}_{ii}(t)\right].$$

Последние неравенства эквивалентны следующим соотношениям:

$$\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left[d_{ij}+\tilde{d}_{ij}(t)\right]\cdot e_j(t)\right|\le\dot{б}_i(t)-\left[d_{ii}-\tilde{d}_{ii}(t)\right]б_i(t),\quad i=\overline{1,n}\ . \tag{13}$$

Введем обозначения:

$$L_{i1}(p)=\left|\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}\left[d_{ij}+\tilde{d}_{ij}(t)\right]e_j(t)\right|,$$

$$L_{i2}(p)=\dot{б}_i(t)-\left[d_{ii}+\tilde{d}_{ii}(t)\right]б_i(t),\qquad i=\overline{1,n}.$$

(14)

Определим верхние грани функций $L_{i1}(p)$:

$$L_{i1}^{+}(p)=\sup_{e\in E} L_{i1}(p),\qquad i=\overline{1,n}. \tag{15}$$

С учетом (10) имеем, что

$$L_{i1}^{+}(p)=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left[\left|a_{ij}\right|+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|b_{il}\right|\left|k_{lj}\right|+a_{ij}+\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|b_{il}^{+}\right|\left|k_{lj}\right|\right]б_j(t),\qquad i=\overline{1,n}.$$

(16)

Теперь можно сформулировать следующее утверждение

**Утверждение.** Пусть $x_i(t_0) \in E_i(t_0)$. Тогда $x_i(t) \in E_i(t)$, если для каждого $t \in [\,t_0, t_k\,]$ будут выполняться соотношения:

$$L_{i1}^{+}(p) \le L_{i2}(p), \qquad i = \overline{1,n}. \tag{17}$$

Заметим, что полученные условия корректны только тогда, когда их правые части соотношений (17) неотрицательны: $L_{i2}(p) \ge 0.$

В результате подмножество

$$P = \left\{ p \in R^r : \ L_{i1}^{+}(p) - L_{i2}(p) \le 0, \quad i = \overline{1,n} \right\}. \tag{18}$$

Следует отметить, что для упрощения анализа условий допустимого качества управления (17) целесоо

$$\dot{б}_i(t) = \alpha_i б_i(t), \qquad i = \overline{1,n}, \tag{19}$$

то функция $б_i(t)$ имеют экспоненциальный характер:

$$б_i(t) = б_i^0 \cdot e^{\alpha_i t}, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{20}$$

где $б_i^0 > 0,$ а $\alpha_i = \alpha < 0$. При этом нетрудно доказать, что неравенства (17) упрощаются и имеют вид:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \ne j}}^{n} \left[ \, |a_{ij}| + a_{ij}^{+} + \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left( |b_{il}| + |b_{il}^{+}| \right) |k_{lj}| \right] б_j^0 \le \left[ \alpha - \left( d_{ii} - \tilde{d}_{ii}(t) \right) \right] б_i^0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{21}$$

Выполнение условий (17) или (21) обеспечивает одновременно и свойство асимптотической устойчиво

$$\lim_{t \to \infty} б_i(t) = 0,$$

а переходные процессы $e_i(t) \in E_i(t)$.

Для определения вектор-параметра p, принадлежащего допустимому подмножеству P, т.е. $p \in P$, можно использовать известные численные методы /3, 4/ или вычислительную процедуру, изложенную в /2/.

**Алгоритм синтеза.** Таким образом, алгоритм синтеза линейной стационарной обратной связи для нестационарной системы состоит из следующих этапов.

**Шаг 1.** Задание модели объекта в виде векторного уравнения (1).

**Шаг 2.** Задание структуры закона управления объектом в виде (5). Составление вектора-параметра $p =$

**Шаг 3.** Определение функций $б_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, задающих границы допустимого множества $E(t)$ дл

**Шаг 4.** Формирование системы неравенств (17) или (21), определяющих описание допустимой области P в пространстве параметров искомого регулятора.

**Шаг 5.** Анализ соотношений (17) или (21) с целью нахождения вектор-параметра $p \in P$.

**Заключение.** Получено описание допустимого подмножества $P$ в пространстве параметров регул
линейной нестационарной системы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оморов Т.Т. Принцип гарантируемой динамики. – Бишкек: Илим, 2001. – 136 с.
2. Оморов Т.Т., Курманалиева Р.Н. Многокритериальный синтез систем управления по показателям качества и сложности. – Бишкек: Илим, 2007. – 136 с.
3. Zakian V. New formulation for the Method of Inequalities. – Proc. IEE, 1979. v.126, № 6, pp. 579–584.
4. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975. – 319 с.