М.К. Калманбетов, А.З. Полотова

Асимптотика синтеза квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с малым запаздыванием в координатах состояния

Объект управления описывается квазилинейной системой интегро-дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = A_1(t)x(t) + A_2(t)x(t-\mu) + B(t)U(t) + \int_{t_0}^{T}[K_{11}(t,s)x(s) + K_{12}(t,s)x(s-\mu)]ds +$$

$$+\mu f\left[x(t), x(t-\mu), \int_{t_0}^{T}[K_{11}(t,s)x(s) + K_{12}(t,s)x(s-\mu)]ds\right]. \qquad (1)$$

Задана начальная функция

$$x(t) = \varphi(t), \quad t_0 - \mu \le t \le t_0, \quad x(t_0) = x^0. \qquad (2)$$

$x(t)$ - n-мерный вектор состояния, $x(t-\mu)$ - m-мерный вектор, имеющий запаздывания по времени, $U(t)$ - r-мерный вектор управления, $K_{ij}(t,s)$ - матрицы, непрерывные в области $D = [t_0 \le t, s \le T]$, $f(x(t), y(t), z(t))$ - вектор размера n и непрерывные по аргументам $x(t), y(t), z(t)$. Здесь введено обозначения:

$$y(t) = x(t-\mu)$$

$$z(t) = \int_{t_0}^{T}[K_{21}(t,s)x(t) + K_{22}(t,s)y(s)]ds.$$

Задача состоит в нахождении оптимального управления $U = U[x(t), y(t)]$, которое минимизирует критерий обобщенной работы [2].

$$J[U(t)] = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[x^T(t)Dx(t) + U^T(t)RU(t) + U^T_{опт}(t)RU_{опт}(t)\right]dt \qquad (3)$$

на траекториях системы (1) при заданных начальных функциях (2) .

Если величина запаздывания не является достаточно малой, то применяя метод шагов можно построить последовательность оптимальных управлений в виде синтеза [3].

Если величина запаздывания достаточно мала по сравнению с отрезком $[t_0, T]$, на котором требуется осуществить синтез систем (1)-(3), то решение задачи становиться затруднительным или вообще невозможным. В этом случае более эффективным является применение теории сингулярных возмущений, которое позволяет получить оптимальное управление в виде сходящегося ряда, вляющийся асимптотическим приближением оптимального управления задачи (1)-(3).

Пологая $\mu = 0$ из (1) получим вырожденную систему

$$\dot{x}_0(t) = A_0(t)x_0(t) + B(t)U_0(t) + \int_{t_0}^{T}K_0(t,s)x_0(s)ds, \quad x_0(t_0) = \varphi_0, \qquad (4)$$

где $x_0(t)$ и $U_0(t)$ - координаты состояния и управления вырожденной системы, $A_0(t) = A_1(t) + A_2(t), \quad K_0(t,s) = K_{11}(t,s) + K_{12}(t,s).$

Управление, минимизирующее критерий (3) определяется через координаты состояния равенством [2]:

$$U_0(t) = -R^{-1}B(t)P_0(t)x_0(t), \qquad (5)$$

где $P_0(t)$ - является решением матричного интегро-дифференциального уравнения вида

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -A_0^T(t)P_0(t) - P_0(t)\left(A_0(t) + K_0(t)\right) - D - \int_{t_0}^{T}K_0^T(s,t)P_0(s)ds, \qquad (6)$$

с граничным условием

$$P_0(T) = 0, \qquad (7)$$

где $K_0(t) = \int_{t_0}^{T} K_0(t,s)ds.$

Несмотря на то, что величина запаздывания достаточно мала, пренебрежение этой величины приводить к принципиальным ошибкам как количественного, так и качественного характера. Поэтому, для решение задачи воспользуемся асимптотическим методом теории сингулярных возмущений, который позволяет произвести предварительный анализ уравнений путем добавления новых переменных, которые будет уже медленно изменяющимися функциями, являющимися решениями дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, сравнительно быстро вычисляемые численными методами.

Координаты состояния $x(t-\mu)$ аппроксимируем посредством формулы:

$$\mu\dot{y}(t) = A_3x(t) + A_4y(t), \qquad y(t_0) = \varphi(t_0-\mu) = y^0(\mu), \qquad (8)$$

где постоянные матрицы A_3 и A_4 имеют вид, полученные в [2].

Теперь задачу синтеза можно сформулировать следующим образом:

найти оптимальное управление $U(t,\mu) = U\left(x(t,\mu), y(t,\mu)\right)$, минимизирующее критерий (3) на траекториях системы

$$\dot{x}(t) = A_1(t)x(t) + A_2(t)y(t) + B(t)U(t) + \int_{t_0}^{T}\left[K_{11}(t,s)x(s) + K_{12}(t,s)y(s)\right]ds +$$
$$+ \mu f\left[x(t), y(t), z(t)\right],.$$

$$\mu\dot{y}(t) = A_3x(t) + A_4y(t), \qquad (9)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad y(t_0) = y^0(\mu). \qquad (10)$$

Если в (9) положить $\mu = 0$, то получим так называемую упрощенную систему вида

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{U}(t) + \int_{t_0}^{T}\bar{K}(t,s)\bar{x}(s)ds, \quad \bar{x}(t_0) = x^0 \qquad (11)$$

где $\bar{A}(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}A_3$, $\qquad \bar{K}(t,s) = K_{11}(t,s) - K_{21}(t,s)A_4^{-1}A_{3.}$

Сравнение (4) и (11) показывает отличия простого пренебрежения малым запаздыванием его величиной после аппроксимации координаты состояния с запаздыванием. Они эквивалентны только в том случае, когда имеют место тождества

$$E = -A_4^{-1}A_3,$$

где E -единичная матрица, т.е. она возможна только в случае аппроксимации первого порядка. Отсюда следует, что оптимальное управление $\bar{U}(t)$ задачи (11) и (3), определяемое из равенства

$$\bar{U}(t) = -R^{-1}B^T(t)\bar{P}(t)\bar{x}(t), \qquad (12)$$

где $\bar{P}(t)-$ решение интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{d\bar{P}(t)}{dt} = -\bar{A}^T(t)\bar{P}(t) - \bar{P}(t)(\bar{A}(t) + \bar{K}(t)) - D - \int_{t_0}^{T}\bar{K}(s,t)\bar{P}(s)ds,$$

$$\bar{P}(t) = 0, \qquad (13)$$

совпадает с управлением вырожденной задачи только в том случае, когда равны коэффициенты обратной связи $P_0(t)$ и $\bar{P}(t)$.

Предварительно установим, что если матричное интегро-дифференциальное уравнение (13) имеет решение, то система уравнений относительно состояния координат $\bar{x}(t)$ запишется в виде

$$\dot{\bar{x}}(t) = A^*(t)\bar{x}(t) + \int_{t_0}^{T} \bar{K}(t,s)\bar{x}(s)ds, \quad A^* = \bar{A}(t) - B(t)R^{-1}B^T(t)\bar{P}(t) \tag{14}$$

Пусть $\Phi(t,s)$ нормированная при $t = s,$ т.е. $\Phi(t,t) = E,$ где E - единичная матрица, является фундаментальной матрицей системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\bar{x}}(t) = A^*(t)\bar{x}(t).$$

Тогда (14) имеет решение

$$\bar{x}(t) = \Phi(t,t_0)x^0 + \int_{t_0}^{T} \Phi(t,s)\bar{g}(s)ds,$$

где $\bar{g}(t) = \int_{t_0}^{T} \bar{K}(t,s)\bar{x}(s)ds$.

Таким образом, решение системы (14) окончательно запишется в виде

$$\bar{x}(t) = \hat{O}(t,t_0)x^0 + \int_{t_0}^{T} \hat{O}(t,s)\left[\int_{t_0}^{T} \bar{K}(t,s)((\mathring{a}\tilde{o}\check{\delta}\hat{A}^*(s)(s - t_0))x^0)ds\right] \tag{15}$$

$$\bar{y}(t) = -A_4^{-1}A_3\bar{x}(t).$$

Теперь переходим к построению асимптотику задачи синтеза полной системы (3) и (9).

Введем новую переменную $\tau = (t - t_0)/\mu$.

Координаты состояния медленных и быстрых движений $x(t,\mu)$ и $y(t,\mu),$ а также функцию управления $u(t,\mu)$ представим в виде:

$$x(t,\mu) = \bar{x}(t,\mu) + \Pi_{x(\tau,\mu)}, \quad y(t,\mu) = \bar{y}(t,\mu) + \Pi_{y(\tau,\mu)}, \quad u(t,\mu) = \bar{u}(t,\mu) + \Pi_{u(\tau,\mu)},$$

где $\bar{x},\bar{y},\bar{u}$ -главные члены, Π_x,Π_y,Π_u -погранслойные функции представляют асимптотические ряды относительно малого параметра μ :

$$\bar{x}(t,\mu) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \bar{x}_\kappa(t)\mu^\kappa, \quad \Pi_{x(\tau,\mu)} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \Pi_{\kappa x(\tau)}\mu(\kappa) \tag{16}$$

(Остальные функции разлагаются в ряд аналогично).

Нелинейную функцию $f(\bullet)$ преобразуем следующим образом $[1]$:

$$f(x(t),y(t),z(t)) = f(\bar{x}(t,\mu),\bar{y}(t,\mu),\bar{z}(t,\mu)) +$$
$$[f(\bar{x}(t_0+\tau\mu,\mu) + \Pi_{x(\tau,\mu)}, \bar{y}(t_0+\tau\mu,\mu) + \Pi_{y(\tau,\mu)}, \bar{z}(t_0+\tau\mu,\mu) + \Pi_{z(\tau,\mu)})$$
$$- f(\bar{x}(t_0+\tau\mu,\mu), \bar{y}(t_0+\tau\mu,\mu), \bar{z}(t_0+\tau\mu,\mu))] = \bar{f}(t,\mu) + \Pi_{f(\tau,\mu)} \tag{17}$$

Считая $\bar{x}_0(t),\bar{y}_0(t)$ -известными решениями (позже покажем, что $\bar{x}_0(t) = \bar{x}(t),\bar{y}_0(t) = \bar{y}(t)$), функции $\bar{f}(\bullet)$ и $\Pi_{f(\bullet)}$ разлагаем в ряд Тейлора в окрестности точки $(\bar{x}_0(t),\bar{y}(t))$ по степеням параметра μ .

Подставляя (14) в (9), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d\bar{x}_k(t)}{dt}\mu^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d\Pi_{\kappa x(\tau)}}{d\tau}\mu^{k-1} = A_1(t)\sum_{k=0}^{\infty}(x_k(t) + \Pi_{kx(\tau)})\mu^k + A_2(t)\sum_{k=0}^{\infty}(\bar{y}_k(t) + \Pi_{ky(\tau)})\mu^k +$$
$$B(t)\sum_{k=0}^{\infty}(\bar{u}_k(t) + \Pi_{ku(\tau)})\mu^k + \int_{t_0}^{T}(K_{11}(t,s)\sum_{k=0}^{\infty}(\bar{x}_k(s) + \Pi_{kx(j)})\mu^k + K_{12}(t,s)\sum_{k=0}^{\infty}(\bar{y}_k(s) + \Pi_{ky(j)})\mu^k)ds +$$
$$\mu(f(t,\mu) + \Pi_{f(\tau,\mu)}),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d\bar{y}_k(t)}{dt}\mu^{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d\Pi_{ky(\tau)}}{d\tau}\mu^{k}=A_3(t)\sum_{k=0}^{\infty}(\bar{x}_k(t)+\Pi_{kx(\tau)})\mu^{k}+A_4\sum_{k=0}^{\infty}(\bar{y}_k(t)+\Pi_{ky(\tau)})\mu^{k}$$

Выписываем системы уравнений относительно переменным t и τ .
Относительно t с учетом (17) имеем систему уравнений:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d\bar{x}_k(t)}{dt}\mu^{k}=A_1(t)\sum_{k=0}^{\infty}(\bar{x}_k(t)\mu^{k}+A_2(t)\sum_{k=0}^{\infty}\bar{y}_k(t)\mu^{k}+B(t)\sum_{k=0}^{\infty}\bar{u}_k(t)\mu^{k}+$$

$$\int_{t_0}^{T}(K_{11}(t,s)\sum_{k=0}^{\infty}\bar{x}_k(s)+K_{12}(t,s)\sum_{k=0}^{\infty}\bar{y}_k(s))\mu^{k}ds+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\bar{f}^{(k)}(t,\rho)}{k!}\mu^{k+1},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d\bar{y}_k(t)}{dt}\mu^{k+1}=A_3\sum_{k=0}^{\infty}\bar{x}_k(t)\mu^{k}+A_4\sum_{k=0}^{\infty}\bar{y}_k(t)\mu^{k},\tag{18}$$

где , $\bar{f}(t,0)=\bar{f}(\bar{x}_0(t),\bar{y}_0(t),\bar{z}_0(t)),\qquad \bar{z}_0(t)=\int_{t_0}^{T}[K_{21}(t,s)\bar{x}_0(s)+K_{22}(t,s)\bar{y}_0(s)]ds$

$$\bar{f}'(t,0)=\left(\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{x}}\bar{x}_1(t)+\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{y}}\bar{y}_1(t)\right)\Bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_0(t)\\ \bar{y}=\bar{y}_0(t)\\ \bar{z}=\bar{z}_0(t)}}+\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{z}}\Bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_0(t)\\ \bar{y}=\bar{y}_0(t)\\ \bar{z}=\bar{z}_0(t)}}\int_{t_0}^{T}(K_{21}(t,s)\bar{x}_1(s)+K_{22}(t,s)\bar{y}_1(s))ds+f_1(\bar{x}_0(t),\bar{y}_0(t),\bar{z}_0(t)),$$

$$\bar{f}''(t,0)=\left(\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{x}}\bar{x}_2(t)+\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{y}}\bar{y}_2(t)\right)\Bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_0(t)\\ \bar{y}=\bar{y}_0(t)\\ \bar{z}=\bar{z}_0(t)}}+$$

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial z}\Bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_0(t)\\ \bar{y}=\bar{y}_0(t)\\ \bar{z}=\bar{z}_0(t)}}\int_{t_0}^{T}(K_{21}(t,s)\bar{x}_2(s)+K_{22}(t,s)\bar{y}_2(s))ds+f_2(\bar{x}_0(t),\bar{y}_0(t),\bar{z}_0(t),\bar{x}_1(t),\bar{y}_1(t),\bar{z}_1(t)),$$

. . . .

$$\bar{f}^{(i)}(t,0)=\left(\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{x}}\bar{x}_i(t)+\frac{\partial\bar{f}}{\partial\bar{y}}\bar{y}_i(t)\right)+$$

$$\frac{\partial\bar{f}}{\partial z}\Bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_0(t)\\ \bar{y}=\bar{y}_0(t)\\ \bar{z}=\bar{z}_0(t)}}\int_{t_0}^{T}(K_{21}(t,s)\bar{x}_i(s)+K_{22}(t,s)\bar{y}_i(s))ds+f_i(\bar{x}_0(t),\bar{y}_0(t),\bar{z}_0(t),...,\bar{x}_{i-1}(t),\bar{y}_{i-1}(t),\bar{z}_{i-1}(t)),$$

$i=1,2,...,k,....$

Функции $f_1,...,f_{i-1}$ выражаются через производные первого , второго и более высоких порядков.

Относительно τ с учетом (17) имеем систему уравнений:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d\Pi_{kx(\tau)}}{d\tau}\mu^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}A_{1k}\Pi_{kx(\tau)}\mu^{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}A_{2k}\Pi_{ky(\tau)}\mu^{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}B_k\Pi_{ku(\tau)}\mu^{k+1}+\int_{0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}K_{11}\Pi_{kx(j)}+K_{12}\Pi_{ky(j)}\right)*$$

$$\mu^{k+2}dj+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Pi^{(k)}_{f(\tau,0)}}{k!}\mu^{k+2},$$

(19)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d\Pi_{ky(\tau)}}{d\tau}\mu^{k}=A_3\sum_{k=0}^{\infty}\Pi_{kx(\tau)}\mu^{k}+A_4\sum_{k=0}^{\infty}\Pi_{ky(\tau)}\mu^{k}$$

где

$$A_{ik}=\frac{A_i^{(k)}(t_0)}{k!}\tau^k,\qquad B_k=\frac{B^{(k)}(t_0)}{k!}\tau^k\qquad K_{1ik}=\frac{K_{1i}^{(k)}(t_0,t_0)}{k!}\tau^k\qquad i=1,2,...$$

$$\Pi_{f(\tau,0)}=f(\bar{x}_0(t_0)+\Pi_{0x(\tau)},\bar{y}_0(t_0)+\Pi_{0y(\tau)},\bar{z}_0(t)+\Pi_{0z(\tau)})-f(\bar{x}_0(t_0),\bar{y}_0(t_0),\bar{z}_0(t_0)),$$

$$\Pi'_{f(\tau,0)}=-\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{x}}(\bar{x}_1(t_0)+\Pi_{1x(\tau)})+\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}(\bar{y}_1(t_0)+\Pi_{1y(\tau)})\Bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_0(t_0)+\Pi_{0x(e)}\\ \bar{y}=\bar{y}_0(t_0)+\Pi_{0y(\tau)}\\ \bar{z}=\bar{z}_0(t_0)+\Pi_{0z(\tau)}}}+\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}\right)\Bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_0(t_0)+\Pi_{0x(e)}\\ \bar{y}=\bar{y}_0(t_0)+\Pi_{0y(\tau)}\\ \bar{z}=\bar{z}_0(t_0)+\Pi_{0z(\tau)}}}\cdot$$

$$\mu\int_0^\infty\left[K_{21}(t_0,j)(\bar{x}_1(t_0)+\Pi_{1x_1(j)})+K_{22}(t_0,j)(\bar{y}_1(t_0)+\Pi_{1y_1(j)})\right]dj+\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{x}}\bar{x}_1(t_0)+\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\bar{y}_1(t_0)\right)\Bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_0(t_0)\\ \bar{y}=\bar{y}_0(t_0)\\ \bar{z}=\bar{z}_0(t_0)}}+$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}\Bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_0(t_0)\\ \bar{y}=\bar{y}_0(t_0)\\ \bar{z}=\bar{z}_0(t_0)}}f(\bar{x}_1(t_0),\bar{y}_1(t_0),\bar{z}_1(t_0))+\Pi_{f_1}$$

$$\Pi''_{f(\tau,0)}=-\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{x}}(\bar{x}_2(t_0)+\Pi_{2x(\tau)})+\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\right)\Bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_0(t_0)+\Pi_{0x(e)}\\ \bar{y}=\bar{y}_0(t_0)+\Pi_{0y(\tau)}\\ \bar{z}=\bar{z}_0(t_0)+\Pi_{0z(\tau)}}}(\bar{y}_2(t_0)+\Pi_{2y(\tau)})+\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}\Bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_0(t_0)+\Pi_{0x(e)}\\ \bar{y}=\bar{y}_0(t_0)+\Pi_{0y(\tau)}\\ \bar{z}=\bar{z}_0(t_0)+\Pi_{0z(\tau)}}}\right]\cdot$$

$$\mu\int_0^\infty(K_{21}(t_0,j)(\bar{x}_2(t_0)+\Pi_{2x_2(j)})+K_{22}(t_0,j)(\bar{y}_2(t_0)+\Pi_{2y_2(j)})dv+\Pi_{f_2}+\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{x}}\bar{x}_2(t_0)+\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\bar{y}_2(t_0)\right)\Bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_0(t_0)\\ \bar{y}=\bar{y}_0(t_0)\\ \bar{z}=\bar{z}_0(t_0)}}+$$

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}\Bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_0(t_0)\\ \bar{y}=\bar{y}_0(t_0)\\ \bar{z}=\bar{z}_0(t_0)}}\cdot f(\bar{x}_2(t_0),\bar{y}_2(t_0),\bar{z}_2(t_0),$$

$$\Pi^{(i)}_{f(\tau,0)}=-\left[\frac{\partial f}{\partial\bar{x}}\Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0(t_0)+\Pi_{0x(\tau)}}(\bar{x}_{i-1}(t_0)+\Pi_{i-1x(\tau)})+\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\Big|_{\bar{y}=\bar{y}_0(t_0)+\Pi_{0y(\tau)}}(\bar{y}_{i-1}(t_0)+\Pi_{i-1y(\tau)})+\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}\Big|_{\bar{z}=\bar{z}_0(t_0)+\Pi_{0z(\tau)}}\right]\cdot$$

$$\mu\int_0^\infty\left[K_{21}(t_0,j)\left(\bar{x}_i(t_0)+\Pi_{ix(j)}\right)+K_{22}(t_0,j)\left(\bar{y}_i(t_0)+\Pi_{iy(j)}\right)\right]dj+\Pi_{f_i}+\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{x}}\bar{x}_i(t_0)+\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\bar{y}_i(t_0)\right)\Bigg|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_0(t_0)\\ \bar{y}=\bar{y}_0(t_0)\\ \bar{z}=\bar{z}_0(t_0)}}\cdot$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0(t_0),\bar{y}=\bar{y}_0(t_0),\bar{z}=\bar{z}_0(t_0)}\cdot f(\bar{x}_i(t_0),\bar{y}_i(t_0)\bar{z}_i(t_0)$$

где $\Pi_{f_1},\Pi_{f_2},...\Pi_{f_i},...$ -выражаются через производные второго и более высоких порядков.
Критерий относительно t и τ запишутся в виде:

$$J[\bar{u}(t,\mu)]=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\bar{x}_k^T(t)\mu^kD\sum_{k=0}^{\infty}\bar{x}_k(t)\mu^k+\sum_{k=0}^{\infty}\bar{u}_k^T(t)\mu^kR\sum_{k=0}^{\infty}\bar{u}_k(t)\mu^k+\sum_{k=0}^{\infty}\bar{u}_{koon\,\mu^k}(t)R\bar{u}_{onm\mu^k}(t)\right]dt$$

$$\Pi_{J(u(\tau,\mu))}=\frac{\mu}{2}\int_0^\infty(\sum_{k=0}^{\infty}\bar{x}_k^T(t_0)\mu^kD\sum_{k=0}^{\infty}\Pi_{kx(\tau)}\mu^k+\sum_{k=0}^{\infty}\Pi_{kx(\tau)}^T\mu^kD\sum_{k=0}^{\infty}\bar{x}_k(t_0)\mu^k+$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Pi_{kx(\tau)}^T \mu^k D \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_{k\,x(\tau)} \mu^k + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}_k^T (t_0) \mu^k R \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_{k\,u(\tau)} \mu^k +$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \Pi_{k\,u(\tau)}^T \mu^k R \sum_{k=0}^{\infty} u_k (t_0) \mu^k + \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_{k\,u(\tau)}^T \mu^k R \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_{k\,u(\tau)} \mu^k +$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{konm}^T (t_0) \mu^k R \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_{koon} u(\tau) \mu^k + \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k^T u_{onm} (\tau) \mu^k R \sum_{k=0}^{\infty} u_{koon} (t_0) \mu^k + \qquad (21)$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \Pi_{k\,u_{onm}(\tau)}^T \mu^k R \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_{k\,u_{onm}(\tau)} \mu^k)$$

Приравнивая коэффициенты при различных степенях μ , в (18) для определения $\bar{x}_i(t), \bar{y}_i(t)$ получим систему уравнений:

$$\frac{d\bar{x}_0(t)}{dt} = A_1(t)\bar{x}_0(t) + A_2(t)\bar{y}_0(t) + B(t)\bar{u}_0(t) + \int_{t_0}^{T} \left[K_{11}(t,s)\bar{x}_0(s) + K_{12}(t,s)\bar{y}_0(s) \right] ds,$$
$$0 = A_3\bar{x}_0(t) + A_4\bar{y}_0(t),$$

или, выражая $\bar{y}_0(t),$ получим

$$\dot{\bar{x}}_0(t) = \bar{A}(t)\bar{x}_0(t) + B(t)\bar{u}_0(t) + \int_{t_0}^{T} \bar{K}(t,s)\bar{x}_0(s)ds \qquad (21)$$
$$\bar{x}_0(t) = x^0$$

Критерий, соответствующий значению μ^0 имеет вид:

$$J_0 = J_{(\bar{u}_0(t))} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \left[\bar{x}_0^T(t)D\bar{x}_0(t) + \bar{u}_0^T(t)R\bar{u}_0(t) + \bar{u}_{0onm}^T(t)R\bar{u}_{0onm}(t) \right] dt \qquad (22)$$

Сравнивая (21), (22) с (11), (3) убедимся, что действительно имеют место равенства:

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0(t), \qquad \bar{y}(t) = \bar{y}_0(t), \qquad \bar{u}(t) = \bar{u}_0(t) = -R^{-1}B^T(t)P_0(t)\bar{x}_0(t) \qquad (23)$$

Относительно τ имеем систему уравнений :

$$\frac{d\Pi_0 y(\tau)}{d\tau} = 0,$$
$$\frac{d\Pi_0 y(\tau)}{d\tau} = A_3\Pi_0 x(\tau) + A_4\Pi_0 y(\tau) \qquad (24)$$

Критерий погранфункции, соответствующий этому приближению

$$\Pi_{0J} = \Pi_{J(\bar{u}_0)} = 0$$

Начальные условия определяются из равенств:

$$\sum_{л=0}^{\infty} (\bar{x}_k(t_0) + \Pi_{kx(0)})\mu^k = \varphi(t_0), \qquad \sum_{л=0}^{\infty} (\bar{y}_k(t_0) + \Pi_{ky(0)})\mu^k = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(0)\mu^k$$

В нулевом приближении имеем:

$$\bar{x}_0(t_0) + \Pi_{0x(0)} = x^0, \qquad \bar{y}_0(t_0) + \Pi_{0y(0)} = \varphi(0)$$

Поскольку $\bar{x}_0(t_0) = x^0$, то имеем:

$$\Pi_{0x(0)} = x^0 - \bar{x}_0(t_0) = 0, \qquad \Pi_{0y(0)} = \varphi(0) - \bar{y}_0(t_0) \qquad (25)$$

Решение (24) с учетом (25) запишутся в виде

$$\Pi_{0x(\tau)} = 0, \qquad \Pi_{0y(\tau)} = (\varphi_0(0) - \bar{y}_0(t_0))\exp(A_4\tau) \qquad (26)$$

Таким образом, задача синтеза в нулевом приближении решена:

$$x(t,\mu) \approx \bar{x}_0(t), \qquad y(t,\mu) \approx \bar{y}_0(t) + \Pi_{0y(\tau)},$$
$$u(t,\mu) \approx -R^{-1}B(t)P_0\bar{x}_0(t), \qquad J(t,\mu) \approx J_0$$

Переходим к определению оптимального управления 1-го приближения.

Приравнивая коэффициенты при μ, из (18), (21) имеем:

$$\frac{d\bar{x}_1(t)}{dt} = A_1(t)\bar{x}_1(t) + A_2(t)\bar{y}_1(t) + B(t)\bar{u}_1(t) + \int_{t_0}^{T}\left[K_{11}(t,s)\bar{x}_1(s) + K_{12}(t,s)\bar{y}_1(s)\right]ds + \bar{f}(t,0), \tag{27}$$
$$0 = A_3\bar{x}_1(t) + A_4\bar{y}_1(t)$$

$$\bar{x}_1(t_0) + \Pi_{1x(0)} = 0, \qquad \bar{y}_1(t_0) + \Pi_{1y(0)} = \varphi'(0). \tag{28}$$

$$\frac{d\Pi_{1x(\tau)}}{d\tau} = A_{10}\Pi_{0x(\tau)} + A_{20}\Pi_{0y(\tau)} + B_0\Pi_{0u(\tau)},$$
$$\frac{d\Pi_{1y(\tau)}}{d\tau} = A_3\Pi_1 x(\tau) + A_4\Pi_1 y(\tau) \tag{29}$$

$$J_1 = J(\bar{u}_1(t)) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[\bar{x}_1^T(t)D\bar{x}_1(t) + \bar{u}_1^T(t)R\bar{u}_1(t) + \bar{u}_{1onm}^T(t)R\bar{u}_{1onm}(t)\right]dt, \tag{30}$$

$$\Pi_{1J} = \Pi_{J(\bar{u}_1)} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}((\bar{x}_0(t_0) + \Pi_{0x(\tau)})^T D(\bar{x}_0(t_0) + \Pi_{0x(\tau)}) + (\bar{u}_0 + \Pi_{0u(\tau)})^T R(\bar{u}_0(t) + \Pi_{0u(\tau)}) +$$
$$(\bar{u}_0(t_0) + \Pi_{0u(\tau)})^T R(\bar{u}_0(t_0) + \Pi_{0u(\tau)}) + (\bar{u}_{0onm}(t_0) + \Pi_{0u_{onm}(\tau)})^T R(\bar{u}_{0onm}(t) + \Pi_{0u_{onm}(\tau)}))d\tau \tag{31}$$

Переписывая (27) в виде

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{A}(t)\bar{x}_1(t) + B(t)\bar{u}_1(t) + \int_{t_0}^{T}\bar{K}(t,s)\bar{x}_1(t)ds + \bar{f}_1(t),$$
$$\bar{A}(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}A_3, \quad \bar{K}(t,s) = \bar{K}_{11}(t,s) - \bar{K}_{12}(t,s)A_4^{-1}A_3, \quad \bar{f}_1(t) = \bar{f}(t,0),$$

рассматривая $\bar{f}(t)$ как постоянно действующее возмущение, запишем оптимальное управление $\bar{u}_1(t)$, минимизирующее критерий (30) в виде

$$\bar{u}_1(t) = -R^{-1}B(t)\left[P_1(t)\bar{x}_1(t) + q_0(t)\right],$$

где $P_1(t)$ и $q_0(t)$ являются решениями матричных и векторных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\bar{A}^T(t)P_1(t) - P_1(t)\bar{A}(t) - D, \qquad P_1(T) = 0,$$
$$\frac{dq_0(t)}{dt} = (P_1(t)S(t) - \bar{A}^T(t))q_0(t) - P_1(t)\bar{f}_1(t), \qquad q_0(T) = 0,$$
$$S(t) = B(t)R^{-1}B^T(t).$$

Определяя $\Pi_{1x(\tau)}$ из 1-го уравнение системы (29), с учетом (28) найдем $\Pi_{1y(\tau)}$.

Далее, поскольку известны значения $\bar{u}_0(t)$ и $\Pi_{0u(\tau)}$, то из (30) и (31) можно определить значения критерии J_1 и Π_{1J}.

Таким образом, решена задача синтеза первого приближения

$$x(t,\mu) \approx \bar{x}_0(t) + (\bar{x}_1(t) + \Pi_{1x(\tau)})\mu, \qquad y(t,\mu) \approx \bar{y}_0(t) + \Pi_{0y(\tau)} + (\bar{y}_1(t) + \Pi_{0y(\tau)})\mu,$$
$$u(t,\mu) \approx \bar{u}_0(t) + \bar{u}_1(t)\mu, \qquad \bar{u}_1(t) = -R^{-1}B^T(t)(P_1(t)\bar{x}_1(t) + q_0(t))$$
$$J(u(t,\mu)) \approx J_0 + (J_1 + \Pi_{1J})\mu.$$

Выписывая системы уравнений и критерий качества последующих приближений, относительно t имеем:

$$\dot{\bar{x}}_i(t) = \bar{A}(t)\bar{x}_i(t) + B(t)\bar{u}_i(t) + \int_{t_0}^{T} \bar{K}(t,s)\bar{x}_i(t)ds + \bar{f}_i(t), \qquad (32)$$

$$\bar{f}_i(t) = \bar{f}^{(i)}(t,0)$$

$$\bar{x}_i(t_0) + \Pi_{ix(0)} = 0, \qquad \bar{y}_i(t_0) + \Pi_{iy(0)} = \varphi^{(i)}(0)$$

$$J_i = J(\bar{u}_i(t)) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left[\bar{x}_i^T(t)D\bar{x}_i(t) + \bar{u}_i^T(t)R\bar{u}_i(t) + \bar{u}_{ioon}^T(t)R\bar{u}_{ioon}(t)\right]dt, \quad i = 2,3,... \qquad (33)$$

Тогда решая задачу синтеза для каждого приближения, можно определить оптимальное управление $\bar{u}_2(t), \bar{u}_3(t),...,$ координаты состояния $\bar{x}_2(t), \bar{y}_2(t), \bar{x}_3(t), \bar{y}_3(t),...,$ критерий качества $J_2, J_3,....$

Выписывая систему уравнений и критерий качества относительно погранфункции,

$$\frac{d\Pi_{ix(\tau)}}{d\tau} = A_{1i}\Pi_{i-1\dot{x}(\tau)} + A_{2i}\Pi_{i-1y(\tau)} + B_i\Pi_{i-1u(\tau)} + \int_0^{\infty}(K_{11i}\Pi_{i-2x(j)} + K_{12i}\Pi_{i-2y(j)})dj + \Pi_{f_i(\tau)},$$

$$\Pi_{f_i(\tau)} = \Pi^{(i-2)}_{\frac{f(\tau,0)}{(i-1)!}},$$

$$\frac{d\Pi_{iy(\tau)}}{d\tau} = A_3\Pi_{ix(\tau)} + A_4\Pi_{iy(\tau)}, \qquad (34)$$

$$\bar{x}_i(t_0) + \Pi_{ix(0)} = 0, \qquad \bar{y}_i(t_0) + \Pi_{iy(0)} = \varphi^{(i)}(0)$$

$$\Pi_{iJ} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\begin{bmatrix} (\bar{x}_{i-1}^T(t_0) + \Pi_{i-1x(\tau)})^T D(\bar{x}_{i-1}^T(t_0) + \Pi_{i-1x(\tau)}) + (\bar{u}_{i-1}(t_0) + \Pi_{i-1u(\tau)})^T R(\bar{u}_{i-1}(t_0) + \\ \Pi_{i-1u(\tau)}) + (\bar{u}_{i-1onm}(t_0) + \Pi_{i-1u_{onm}(\tau)})^T R(\bar{u}_{i-1}(t_0) + \Pi_{i-1u_{onm}(\tau)}) \end{bmatrix}dt, \qquad (35)$$

$i = 2,3,...$

при каждом $i \geq 2$ решаем систему уравнений относительно погранслойной функции и определяем значение критерия.

Таким образом, для каждого $i \geq 2$ решена задача синтеза:

$$x(t,\mu) \approx \bar{x}_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty}(\bar{x}_i(t) + \Pi_{ix(\tau)})\mu^i, \qquad y(t,\mu) \approx \sum_{i=0}^{\infty}(\bar{y}_i(t) + \Pi_{iy(\tau)})\mu^i,$$

$$\bar{u}(t,\mu) = -R^{-1}B^T(t)\left[P_0\bar{x}_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty}(P_i\bar{x}_i(t) + q_{i-1})\right]$$

где $P_i(t)$ и $q_{i-1}(t)$ являются решениями соответствующих матричных и векторных уравнений:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -\bar{A}^T(t)P_i(t) - P_i(t)\bar{A}(t) - D, \qquad P_i(T) = 0,$$

$$\frac{dq_{i-1}(t)}{dt} = (P_i(t)S(t) + \bar{A}(t))q_{i-1}(t) - P_i(t)f_i(t), \qquad q_{i-1}(T) = 0 \qquad (36)$$

В случае стационарных объектов, вместо матричного дифференциального уравнения, для коэффициентов обратной связи (36) имеем алгебраические матричные уравнения

$$A^T P_i + P_i A = -D,$$

решение которого запишется в виде

$$P_i = \int_0^{\infty} e^{A^T t} D e^{At} dt.$$

Обозначим через $\xi_j(t,\mu), j=\overline{1,4}$ остатки бесконечного ряда:

$$U(t,\mu)=\sum_{i=0}^{n}\overline{U}_i(t)\mu^i+\mu^{n+1}\xi_1(t,\mu), \qquad J(U(t,\mu))=\sum_{i=1}^{n}J_i\mu^i+\mu^{n+1}\xi_2(t,\mu),$$

$$x(t,\mu)=\sum_{i=0}^{n}\overline{x}_i(t)\mu^i+\xi_3(t,\mu), \qquad y(t,\mu)=\sum_{i=0}^{n}\overline{y}_i(t)\mu^i+\xi_4(t,\mu).$$

На практике воспользуются тем, что $\xi_j, j=\overline{1,4}$ являются бесконечно малыми по сравнению величиной малого параметра, и поэтому бесконечный ряд усекается . При этом справедливы следующая

Теорема. Если задачи Коши (32), (34) при $i=2,3,...$ имеют единственные решения, соответствующие значения оптимального управления $\overline{U}_i(t), i=2,3,...,$ а также постоянно действующие возмущения $f_i(t)$ и $\Pi_{f(\tau)}$- непрерывны и дифференцируемы требуемое число ряд по указанным аргументам, то существуют постоянные $C_j, j=\overline{1,4}$ и число $\mu_0\succ 0$ такие что справедливы оценки

$$|\xi_j(t)|\le C_j, j=\overline{1,4}$$

Теорема доказывается так же как теоремы из $[1]$.

Литература

1. М. Иманалиев. Колебания и устойчивость решений сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе: Илим, 1974
2. М.К. Калманбетов. Асимптотические методы в теории управления систем с особенностями.- Жалалабат: ЦИТ, 2003
3. Калманбетов М.К., Полотова А.З. Синтез систем интегро-дифференциальных уравнений с различным запаздыванием методом шагов. Сб. трудов II Международной научной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике». -Бишкек: Илим, 2006.