В.Т.Мураталиева

Применение метода дополнительного аргумента для построения численного решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Больцмана

Разработанный академиком М.И. Иманалиевым новый метод исследования нелинейных дифференцированных уравнений с частными производными первого порядка, который называется методом дополнительного аргумента, позволяет более эффективно и конкретно определять условия разрешимости уравнений 1-го порядка [3;4;5;6].

С помощью этого метода уравнения с частными производными преобразуются к интегральным уравнениям, где количество независимых переменных на одну больше.

В данной статье показано, что с помощью метода дополнительного аргумента можно находить численные решения для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Больцмана [1,2]:

$$\frac{\partial z(v,t)}{\partial t}+a(v,t,z(v,t))\frac{\partial z(v,t)}{\partial v}+b(v,t)z(v,t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(v,v',t,z(v',t))\,dv', \qquad (1)$$

где $z(v,t)$ - неизвестная функция времени и скорости,

когда $v\in(-\infty;\infty)$ и $t\in[0;T]$,

описывающая распределение электронов в ионизированной среде.

Для уравнения (1) задается начальное условие:

$$z(v,0)=z_0(v) \qquad (2)$$

где $z_0(v)$ - заданная функция.

Задачи такого типа появляются при переносе нейтронов через ядро ядерного реактора, при изучении убегающих электронов в ионизированной плазме, при вычислении проводимости постоянного тока в биологических мембранах и в теории полупроводников [1,2].

Численная реализация метода дополнительного аргумента не заменяет другие известные методы, а дополняет их. Так, в частности, применение этого метода несложно и позволяет получать приближенные решения сразу в исходных координатах. Применимость метода дополнительного аргумента для уравнений математической физики показана в [5]. В [7] на основе этого метода реализовано численное решение модельной задачи.

В соответствии с методом дополнительного аргумента для задачи (1)-(2) запишем расширенную характеристическую систему [8,9] :

$$\frac{d\eta(v,t,s)}{ds}=a(\eta(v,t,s),s,w(v,t,s)), \qquad (3_1)$$

$$\frac{dw(v,t,s)}{ds}=-b(\eta(v,t,s),s)\,w(v,t,s)+\int_{-\infty}^{\infty}K(\eta(v,t,s),v',s,w(v',s,s))dv', \qquad (3_2)$$

с условиями Коши:

$$\eta(v,t,s)\big|_{s=t}=v \qquad (4)$$

$$w(v,t,0)=z_0(\eta(v,t,0)). \qquad (5)$$

Решая (3_2) с учетом (5) получаем что система дифференциальных уравнений (3_1),(3_2) с данными Коши (4)-(5) эквивалентна системе интегральных уравнений:

$$\eta(v,t,s)=v-\int_s^t a(\eta(v,t,\rho),\rho,w(v,t,\rho))\,d\rho,$$

$$w(v,t,s)=exp\left(-\int_0^s b(\eta(v,t,\rho),\rho)d\rho\right)z_0\left(v-\int_0^t a(\eta(v,t,\rho),\rho,w(v,t,\rho))\,d\rho\right)+$$

$$+exp\left(-\int_0^s b(\eta(v,t,\rho),\rho)d\rho\right)\int_0^s\int_{-\infty}^{\infty}K(\eta(v,t,\rho),v',\rho,w(v',\rho,\rho))\,exp\left(\int_0^\rho b(\eta(v,t,\xi),\xi)d\xi\right)dv'd\rho.$$

(6)

Для того чтобы искать решение в классе ограниченных функций, произведем замену: $\mu(v,t,s) = v - \eta(v,t,s)$.

Тогда система (6) примет вид:

$$\mu(v,t,s) = \int_s^t a(v - \mu(v,t,\rho),\rho, w(v,t,\rho))\,d\rho\ ,$$

$$w(v,t,s) = \exp\left(-\int_0^s b(v - \mu(v,t,\rho),\rho)\,d\rho\right) \times z_0\left(v - \int_0^t a(v-\mu(v,t,\rho),\rho, w(v,t,\rho))d\rho\right) +$$

$$+ \int_0^s \int_{-\infty}^{\infty} K(v - \mu(v,t,\rho), v',\rho, w(v',\rho,\rho))\, exp\left(\int_\rho^s b(v-\mu(v,t,\xi),\xi)d\xi\right) dv' d\rho\ . \qquad (7)$$

Эта система рассматривается при заданных функциях $a(v,t,z)$, $b(v,t)$, $K(v,v',t,z(v',t))$ в области $Q_T = \{(v,t,s): -\infty < v < +\infty;\quad 0 \le s \le t \le T\}$.

Сделав замену в системе (7)

$$w(v,t,s) = y(v,t,s)\exp\left(-\int_0^s b(v - \mu(v,t,\rho),\rho)\,d\rho\right),$$

переходим к системе:

$$\mu(v,t,s) = \int_s^t a\left(v - \mu(v,t,\rho),\rho, y(v,t,\rho)\exp\left(-\int_0^\rho b(v-\mu(v,t,\xi),\xi)d\xi\right)\right)d\rho\ ,$$

$$y(v,t,s) = z_0\left(v - \int_0^t a\left(v - \mu(v,t,\rho),\rho, y(v,t,\rho)\exp\left(-\int_0^\rho b(v-\mu(v,t,\xi),\xi)\,d\xi\right)\right)d\rho\right) +$$

$$+ \int_0^s \int_{-\infty}^{\infty} K\left(v - \mu(v,t,\rho), v',\rho, y(v',\rho,\rho)\exp\left(-\int_0^\rho b(v-\mu(v,t,\xi),\xi)d\xi\right)\right)dv'd\rho \qquad (8)$$

Как обычно, при решении подобных задач искомые функции заменяем массивами, которые содержат значения функций в некоторой сеточной области. Мы используем равномерную сеточную область. Так как, неизвестные функции μ и y зависят от трех аргументов, то сеточную область получаем трехмерной.

Используем систему обозначений, принятую в алгоритмических языках, т.е. несколько слитно записанных букв и / или цифр обозначают переменную, а знак умножения записывается явно.

Для приближенного решения системы выберем интервал *[-I v; I v]* вместо $\pm\infty$, где *I v >0* ;
(нечетное) количество *N v* узлов по *v* ,
количество *N t* узлов по *t* ,
тогда шаги $d\,v = 2 * I\,v/(N\,v\text{-}1);\ d\,t = T/(N\,v\text{-}1);$
$v\,r[v\,i] = v\,i \cdot d\,v - I\,v.$
Считаем, $\mu\ i[vi,ti,si] \approx \mu\left(v\,r[vi], ti\cdot dt, si\cdot dt\right)$,
$y\,i[vi,ti,si] \approx y\left(v\,r[vi], ti\cdot dt, si\cdot dt\right)$,
где *v i,t i,s i* – индексы, соответствующие *v,t,s*.

Тогда систему (8) можно записать в виде:

$$\mu\ i[vi,ti,si] = d\,t\sum_{\rho\ i=si}^{ti-1} a\left(v\,r[v\,i] - \mu\ i[v\,i,ti,s\,i],\rho\ i, yi[vi,t\,i,si]\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-d\,t\sum_{\xi\ i=0}^{\rho\ i-1} b\left(v\,r[v\,i] - \mu\ i[vi,ti,\xi\ i],\xi\ i\right)\right)\right),$$

$$y\,i[vi,ti,si] = z_0\left(v\,r[v\,i] - d\,t\sum_{\rho\ i=0}^{ti-1} a\left(v\,r[v\,i] - \mu\ i[vi,ti,\rho\ i],\rho\ i, yi[v\,i,ti,\rho\ i]\times\right.\right.$$

$$\times \exp\left(-dt\sum_{\xi i=0}^{\rho i-1} b\left(vr[vi]-\mu i[vi,ti,\xi i],\xi i\right)\right)\Bigg)\Bigg)+$$

$$+\,dt\cdot dv\sum_{\rho i=0}^{si-1}\sum_{v1i=0}^{Nv-1} K\left(vr[v1i]-\mu i[vi,ti,\rho i],v1i,\rho i,yi[v1i,\rho i,\rho i]\right)). \qquad (9)$$

Все используемые в программе массивы трехмерны и имеют одинаковый размер – $Nv \times Nt \times Ns$,
где Nv – количество шагов сеточной области по переменной v,
Nt – количество шагов по t,
Ns – количество шагов по s, причем $Ns = Nt$.

Для хранения последовательных значений функции $\mu(v,t,s)$ используем массив *mu[ ][ ][ ]*, для функции $y(v,t,s)$ – массив *y[ ][ ][ ]* .

Кроме того, используем несколько дополнительных массивов для хранения значений промежуточных вычислений. Такой подход улучшает читабельность программы и позволяет избежать нескольких дополнительных вычислений, а именно не приходится два раза рассчитывать интеграл от функции *a(... , ... , ...)* , который с разными пределами интегрирования присутствует в формуле для $\mu(v,t,s)$ и для $y(v,t,s)$. Для этого интеграла отводится массив *Integr_a[ ][ ][ ]*. Также вводятся массивы:
Integr_b – для интеграла от функции *b(... , ...)*,
Integr_K[ ][ ][ ] - для интеграла от функции *K(... , ... , ... , ...)*.

Интегралы вычисляем как суммы по сеточным областям. Все интегралы считаются по индексам *v i, s i, t i* .

Очевидным кажется такой способ вычисления интеграла – осуществляется цикл по всем трем переменным *v i, s i, t i* , и в каждой итерации цикла происходит суммирование по переменной интегрирования.

Таким образом, для вычисления одинарного интеграла во всей области потребовалось бы четыре вложенных цикла, а для вычисления двойного интеграла (от функции K) – пять циклов. Это нерационально. Вместо этого была применяем другую методику. Во всех интегралах в этой задаче в пределах интегрирования присутствует переменная s или t . Поэтому, значения интеграла при s и при $s-1$ будут отличаться ровно на функцию интегрирования. Это позволяет осуществлять интегрирование непосредственно в цикле обхода сеточной области без дополнительного цикла интегрирования.
Интеграл от *a()* – *Integr_a* – суммируется по *ti ;*
интеграл от *b()* – *Integr_b* – суммируется по *si ;*
интеграл от *K()* – *Integr_K()* – суммируется по *si* и по *v1i*.

Для вычисления по формулам (9) была составлена программа на языке Microsoft Visual C + + 6.0. Для визуализации результатов использовалось программное средство Mat Lab.

Были проведены расчеты для данных:

$T = 0{,}3;\ \ I v = 5;\ \ N v = 81;\ \ N t = 20;\quad K\left(v,v'\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(v-v'\right)^2\right).$

Количество итераций (последовательных приближений) – 10.

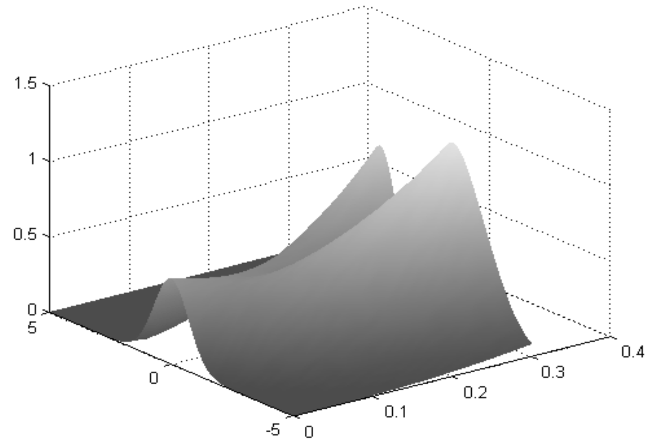
При помощи вычислительных экспериментов обнаружено явление расщепления максимума начального условия в решении интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана для следующих исходных данных:

Пример 1. $z_0(v)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-v^2\right);$

$a(v,t,y)=\dfrac{\sin\left(\pi\left(t+0{,}1\ln\left(1+v^2\right)\right)\right)}{1+0{,}1y^2};\ \ b(v,t)=\dfrac{2+v^2+t^2}{1+v^2+t^2}.$ (см. рис.1).

Пример 2. $z_0(v)=v^2\exp\left(-v^2\right);$

$a(v,t,y)=\dfrac{\sin\left(\pi\left(t+0{,}1\ln\left(1+v^2\right)\right)\right)}{1+0{,}1y^2};\ b(v,t)=\dfrac{2+v^2+t^2}{1+v^2+t^2}.$ (см.рис.2).



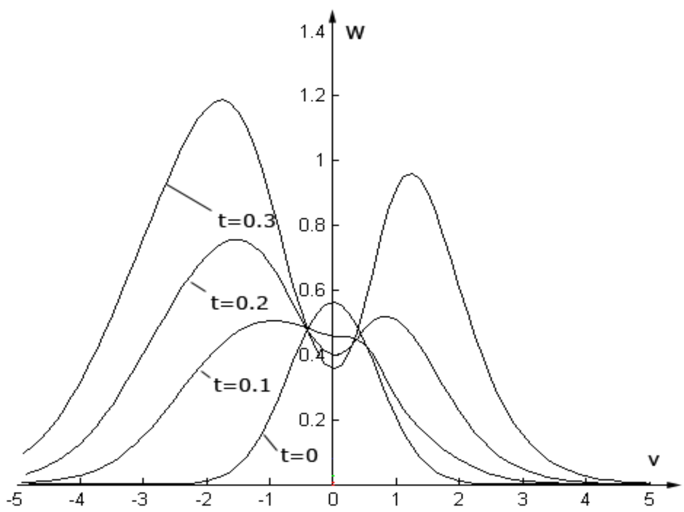
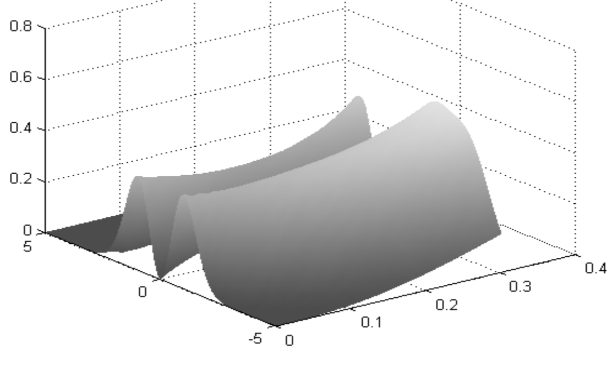


РИС.1. Иллюстрация к примеру 1.



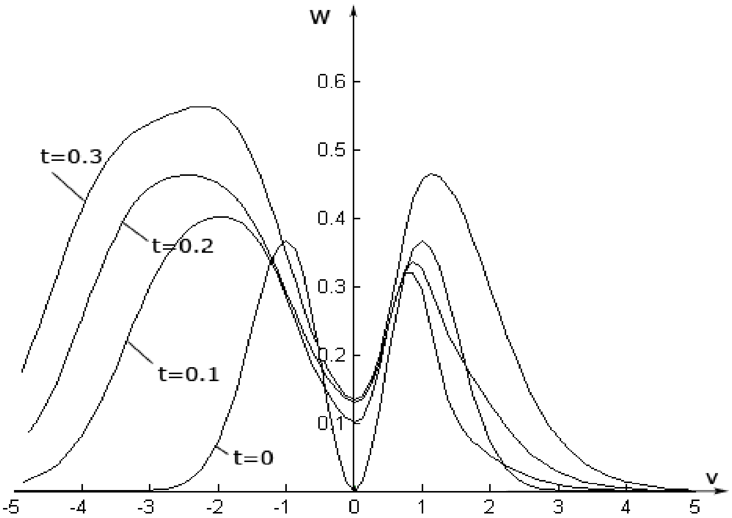


РИС.2. Иллюстрация к примеру 2.

Литература

1. Frazali G, Cornelis V.M. , Van der Mee and S.L. Paveri-Fontana. Conditions for nena in the kinetic theory of particle swarms.// J.Math. Phys., Vol.30, No.5, May 1989-
2. Lods B. On linear Kinetic equations involving unbounded cross-sections.// Math ds in the Applied Sciences, 2004; 27:1049-1075.
3. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема// Докл. АН, 1992. –Т.323, №3.-С 410-414.
4. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема //Докл. АН, 1992. –Т.325, № 6.-С.1111-1115.
5. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени//Докл. АН, 1993. –Т.329, № 5.- С. 543-546.
6. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка //Докл. РАН, 2001, -Т.379, № 1 – С. 16-21.
7. Панков П.С., Иманалиев Т.М., Кененбаева Г.М., Приближенное решение начальной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента// Юбилейная научн. конф., посв. 50-летию развития математики в Академии наук Казахстана: тез. докл. - Алматы, 1995,-С.164.
8. Мураталиева В.Т. Определение условий существования ограниченного решения для квазилинейного упрощенного уравнения Больцмана // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Бишкек: Илим, 2006. - Вып. 34. - С.55-64.
9. Мураталиева В.Т. Определение условий существования ограниченного решения для упрощенного уравнения Больцмана с нелинейным интегральным членом // Математический журнал. - Алматы, 2007. - Т.7, № 2(24). - С.66 - 71.