М.Р. Нарбаев

Простирающиеся симметричные пограничные слои в теории сингулярно возмущенных уравнений при потере устойчивости

1. Обозначения

1.1. Во всей работе $0 < \varepsilon$ – малый параметр.

1.2. $Q(\Omega_\rho)$ – пространство аналитических функций на $\Omega_\rho \subset \mathrm{C}$, где Ω_ρ – открытый круг радиуса $\rho > \sqrt{\frac{(t_0 + T)^2}{4} + D^2}$ и с центром в точке $\left(\frac{t_0 + T}{2};0\right)$, $D \in \mathrm{R}$ и $D > 0$, $\mathrm{C}, \mathrm{R}, \mathbb{N}$ – соответственно множество комплексных, действительных и натуральных чисел.

1.3. Все постоянные встречающиеся в вычислениях и не играющие важную роль обозначим через $\widetilde{C}$.

1.4. Симметрию будем понимать относительно действительной оси, если не оговорено противное.

1.5. $A_j(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \lambda_j(s)ds$, $A_{j1}(t_1,t_2) = \mathrm{Re}A_j(t)$, $A_{j2}(t_1,t_2) = \mathrm{Im}A_j(t)$ $(j = 1,2)$.

Определение 1. Множество точек $\{(t_1;t_2) \in \Omega_\rho\}$, удовлетворяющие условию $A_{jk}(t_1,t_2) = C_{jk}$ назовем линией уровня функции $A_{jk}(t_1,t_2)$ и обозначим $\{C_{jk}\}$.

2. Необходимые определения и постановка задачи

Пусть рассматривается задача

$$\varepsilon \dot{x}(t,\varepsilon) = A(t)x(t,\varepsilon) + f(t), \qquad (1)$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0, \qquad (2)$$

где x^0 - $const$; $x^0 = colon(x_1^0, x_2^0)$; $A(t) = \{a_{kj}(t),\, k, j = 1,2\}$; $f(t) = colon(f_1(t), f_2(t))$; $x(t,\varepsilon) = colon(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon))$; $t \in \Omega_\rho$.

От правых частей системы (1) потребуем выполнения следующих условий: I. $f_j(t),\, a_{kj}(t) \in Q(\Omega_\rho),\ (k, j = 1,2)$.

II. $\forall\, t \in \Omega_\rho : \det A(t) \neq 0,\ a_{21}(t) \neq 0$.

III. Матрица $A(t)$ имеет собственные значения $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$, и для них выполняются условия:

1) $\lambda_j(t) \in Q(\Omega_\rho)$, $\lambda_1(t) = \overline{\lambda_2(\bar{t})}$ – черта означает комплексную сопряженность.

2) $\mathrm{Re}\lambda_1(t_1) < 0$ при $t_0 \le t_1 < T_0$; $\mathrm{Re}\lambda_1(T_0) = 0$; $\mathrm{Re}\lambda_1(t_1) > 0$ при $T_0 < t_1 \le T$.

3) $\forall\, t \in \Omega_\rho : \mathrm{Im}\lambda_1(t) > 0$.

IV. 1) Пусть $A_{11}(t_0,0) = A_{11}(T,0) = C_{11}$ и линия уровня $\{C_{11}\}$ соединяет точки $(t_0;0), (T;0)$, причем $\{C_{11}\}$ – гладкая линия Жордана.

2) Линии уровня функций $A_{jk}(t_1,t_2) = C_{jk}$ представимы в виде $t_2 = \varphi_j(t_1, C_{jk})$, причем существуют $\varphi'_j(t_1, C_{jk})$, $\varphi''_j(t_1, C_{jk})$ и непрерывны.

При выполнении условий II, III.1), IV.1) существует область $H \subset \Omega_\rho$ ограниченная линиями уровня $\{C_{11}\}$ и $\{C_{21}\}$ (лемма 2, [2]).

Из свойств линии уровня сопряженно-гармонических функций известно, что функция $A_{11}(t_1,t_2)$ убывает или возрастает по линиям уровня функции $A_{12}(t_1,t_2)$ и наоборот. Функцию

$A_{12}(t_1,t_2)$ рассмотрим на линии уровня $\{C_{11}\}$. Уравнение $\{C_{11}\}$, представляется в виде $t_2 = \varphi_1(t_1,C_{11})$. Подставляя эту функцию в $A_{12}(t_1,t_2)$ получим $A_{12}(t_1,\varphi_1(t_1,C_{11}))$, отсюда дифференцируя, имеем

$$A'_{12}(t_1,\varphi_1(t_1,C_{11})) = \frac{\partial A_{12}}{\partial t_1} + \frac{\partial A_{12}}{\partial t_2}\cdot\varphi'_1 .$$

Если учесть, что $A'_{11}(t_1,\varphi_1(t_1,C_{11})) = \frac{\partial A_{11}}{\partial t_1} + \frac{\partial A_{11}}{\partial t_2}\cdot\varphi'_1 = 0$, $\frac{\partial A_{11}}{\partial t_1} = \frac{\partial A_{12}}{\partial t_2}$, $\frac{\partial A_{11}}{\partial t_2} = -\frac{\partial A_{12}}{\partial t_1}$ и условие III.3), тогда

$$A'_{12}(t_1,\varphi_1(t_1,C_{11})) = -\frac{\partial A_{11}}{\partial t_2} + \frac{\partial A_{11}}{\partial t_1}\cdot\varphi'_1 = -\frac{\partial A_{11}}{\partial t_2} - \frac{\partial A_{11}}{\partial t_2}\cdot(\varphi'_1)^2 = -\operatorname{Im}\lambda_1(t)[1+(\varphi'_1)^2] < 0 .$$

Таким образом, функция $A_{12}(t_1,t_2)$ убывает по линии уровня $\{C_{11}\}$.

Пусть $A_{12}(t_1,\varphi_1(t_1,C_{11})) = \varepsilon h$, h – новая независимая действительная переменная. Из этого равенства определяется обратная функция $t_1 = F(\varepsilon h)$, причем $F'(\varepsilon h) < 0$, т.е. функция $F(\varepsilon h)$ убывает.

V. Пусть интеграл $\int\limits_0^{+\infty} |F'(\varepsilon h)| dh$ сходится.

Область H разделим на подобласти. Существуют линии уровня функции $A_{11}(t_1,t_2)$, соединяющие точки интервалов (t_0,T_0) и (T_0,T) (лемма 2 [2]), исходя из этого возьмем линию уровня $\{C_{11}(\varepsilon)\}$ соединяющие точки $(t_{01};0),(T_{01};0)$ $(t_0 < t_{01} < T_0 < T_{01} < T)$ и $t_{01} - t_0 = 0(\varepsilon)$, $T - T_{01} = 0(\varepsilon)$. Через H_1 обозначим замкнутую область ограниченную линиями уровня $\{C_{11}(\varepsilon)\}$, $\{C_{11}\}$ и отрезками $[t_0,t_{01}],[T_{01},T]$– действительной оси. Согласно принципа симметрии определим область $\overline{H}_1$ симметричная к H_1. Оставшуюся часть области H обозначим через H_0. Таким образом, $H = H_0 \cup H_1 \cup \overline{H}_1 \subset \Omega_\rho$.

При $\varepsilon = 0$ из (1) имеем вырожденное уравнение

$$A(t)\tilde{x}(t) + f(t) = 0 .$$

Согласно условию II $(\det A(t) \neq 0)$ получим

$$\tilde{x}(t) = -A^{-1}(t)f(t) \equiv \varphi(t) \in Q(H) .$$

VI. Пусть: 1) Существует решение $x(t,\varepsilon)$ задачи (1)-(2) в $Q(H)$; 2) Справедливы асимптотические оценки (при $\varepsilon \to 0$)

$$\tilde{C}_1 - \alpha_1(\varepsilon) \le \|x(t,\varepsilon) - \varphi(t)\| \le \tilde{C}_2 + \alpha_1(\varepsilon),\ t \in H_1 \cup \overline{H}_1,$$

$$0 \le \|x(t,\varepsilon) - \varphi(t)\| \le \tilde{C}_3\alpha_2(\varepsilon),\ t \in H_0,$$

где, $\tilde{C}_1,\tilde{C}_2,\tilde{C}_3$ – некоторые положительные постоянные не зависящие от ε и $\tilde{C}_1 < \tilde{C}_2$; $\alpha_1(\varepsilon) \to 0$ и $\alpha_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

О п р е д е л е н и е 2. При выполнении условия VI область $H_1 \cup \overline{H}_1$ называется простирающимся, симметричным пограничным слоем для решения $x(t,\varepsilon)$ задачи (1)-(2).

Из III.2) следует, что точка покоя присоединенной системы [5] (соответствующее (1)) не является устойчивым на интервале $(T_0,T]$, т.е. нарушается условие устойчивости на всем отрезке $[t_0,T]$. В настоящее время исследование асимптотического поведения решения задачи (1)-(2), в такой постановке не является новой. Тем не менее, отметим, что первой работой, когда нарушается условие устойчивости, является [7]. Вслед за этой работой появились работы [1,3,4,6,7].

Во всех работах вырожденное уравнение имеет тривиальное решение и исследуется асимптотическое поведение решения при близких к нулю начальных условиях, т.е. при условии $\|x^0\| = 0(\varepsilon)$. Во первых такие условия всегда ограничивали класс рассматриваемых уравнений и требовали введения дополнительных условий. Во вторых в названных работах вопрос о существовании пограничного слоя не рассматривалось. Причиной этого является заданное начальное условие, для которой $\|x^0\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Это условие заранее предполагает, что если существует устойчивое решение задачи (1)-(2) в рассматриваемой области $\left(\lim\limits_{\varepsilon \to 0} x(t,\varepsilon) = 0\right)$, то пограничный слой не существует.

Основная цель работы исследовать задачу (1)-(2) на существование пограничного слоя. Задача (1)-(2) в такой постановке изучается впервые.

3. Приведение задачи к стандартному виду

Произведем замену $x(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon) + \varphi(t)$, где $u(t,\varepsilon)$ – новая неизвестная вектор функция. Тогда получим задачу

$$\varepsilon \dot{u}(t,\varepsilon) = A(t)u(t,\varepsilon) - \varepsilon \dot{\varphi}(t), \tag{3}$$

$$u(t_0,\varepsilon) = u^0, \tag{4}$$

где $u^0 = x^0 - \varphi(t_0)$.

В силу условия II существует матрица

$$T(t) = \begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_1 & a_{22} - \lambda_2 \\ -a_{21} & -a_{21} \end{pmatrix},$$

и замена $u(t,\varepsilon) = T(t)v(t,\varepsilon)$, где $v(t,\varepsilon)$ – новая неизвестная вектор функция, задачу (3)-(4) приводит к задаче

$$\varepsilon \dot{v}(t,\varepsilon) = \Lambda(t)v(t,\varepsilon) + \varepsilon B(t)v(t,\varepsilon) + \varepsilon g(t), \tag{5}$$

$$v(t_0,\varepsilon) = v^0, \tag{6}$$

где $v^0 \equiv T^{-1}(t_0)\cdot u^0$; $\Lambda(t) = diag[\lambda_1(t),\lambda_2(t)]$; $B(t) \equiv -T^{-1}(t)\cdot \dot{T}(t)$; $g(t) \equiv -T^{-1}(t)\cdot \dot{\varphi}(t)$. Из условия I следует, что $g_j(t) \in Q(H)$ и $B(t) = \{b_{kj}(t),\, k,j = 1,2\}$, $b_{kj}(t) \in Q(H)$.

Произведем замену $v(t,\varepsilon) = y(t,\varepsilon) + \Pi(t,\varepsilon)$, где $y(t,\varepsilon), \Pi(t,\varepsilon)$ – неизвестные вектор функции, причем

$$y(t,\varepsilon) = colon(y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon)),\ \Pi(t,\varepsilon) = colon(\Pi_1(t,\varepsilon), \Pi_2(t,\varepsilon)).$$

Имеем

$$\varepsilon \dot{y}(t,\varepsilon) + \varepsilon\dot{\Pi}(t,\varepsilon) = \Lambda(t)y(t,\varepsilon) + \Lambda(t)\Pi(t,\varepsilon) + \varepsilon B(t)[y(t,\varepsilon) + \Pi(t,\varepsilon)] + \varepsilon g(t).$$

Для определения функций $\Pi(t,\varepsilon)$ и $y(t,\varepsilon)$ напишем уравнения

$$\varepsilon\dot{\Pi}(t,\varepsilon) = \Lambda(t)\Pi(t,\varepsilon) + \varepsilon B(t)\Pi(t,\varepsilon), \tag{7}$$

$$\varepsilon \dot{y}(t,\varepsilon) = \Lambda(t)y(t,\varepsilon) + \varepsilon B(t)y(t,\varepsilon) + \varepsilon g(t), \tag{8}$$

с условиями

$$\Pi(t_0,\varepsilon) = v^0, \tag{9}$$

$$y(t_0,\varepsilon) = 0. \tag{10}$$

Таким образом, решение поставленной задачи приведено к исследованию задач (7)-(9) и (8)-(10).

4. Решение задачи

Справедлива теорема.

Т е о р е м а 1. Пусть выполняются условия I-V. Тогда: 1) решение задачи (7)-(9) существует в $Q(H)$ и единственно; 2) для $\Pi(t,\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\begin{cases} \widetilde{C}_1\|v^0\| \le \|\Pi(t,\varepsilon)\| \le 2\widetilde{C}_2\|v^0\|,\ t \in H_1 \cup \overline{H}_1; \\ 0 \le \|\Pi(t,\varepsilon)\| \le 2\widetilde{C}\varepsilon^n,\ t \in H_0,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{11}$$

где $\widetilde{C}, \widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2$ – некоторые положительные постоянные независящие от ε и $\widetilde{C}_1 = \min\left\{E_j(t,t_0,\varepsilon),\, j = 1,2,\, t \in H_1 \cup \overline{H}_1\right\}$, $\widetilde{C}_2 = \max\left\{E_j(t,t_0,\varepsilon),\, j = 1,2,\, t \in H_1 \cup \overline{H}_1\right\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задачу (7)-(9) заменим следующими эквивалентными уравнениями

$$\Pi_1(t,\varepsilon) = v_1^0 E_1(t,t_0,\varepsilon) + \int\limits_{p_1(t_0,t)} E_1(t,\tau,\varepsilon) b_{12}(\tau) \Pi_2(\tau,\varepsilon) d\tau,$$

$$\Pi_2(t,\varepsilon) = v_2^0 E_2(t,t_0,\varepsilon) + \int\limits_{p_2(t_0,t)} E_2(t,\tau,\varepsilon) b_{21}(\tau) \Pi_1(\tau,\varepsilon) d\tau,$$

где $E_1(t,\tau,\varepsilon) = \exp\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^t [\lambda_1(s) + \varepsilon b_{11}(s)]ds$, $E_2(t,\tau,\varepsilon) = \exp\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^t [\lambda_2(s) + \varepsilon b_{22}(s)]ds$, $p_j(t_0,t)$ $(j = 1,2)$ – пути интегрирования соединяющая точки t_0 и $t \in H$.

Для этих уравнений определим последовательные приближения:

$$\Pi_{10}(t,\varepsilon) = \Pi_{20}(t,\varepsilon) = 0,$$

$$\Pi_{1m}(t,\varepsilon) = v_1^0 E_1(t,t_0,\varepsilon) + \int\limits_{p_1(t_0,t)} E_1(t,\tau,\varepsilon) b_{12}(\tau) \Pi_{2m-1}(\tau,\varepsilon) d\tau,$$

$$\Pi_{2m}(t,\varepsilon) = v_2^0 E_2(t,t_0,\varepsilon) + \int\limits_{p_2(t_0,t)} E_2(t,\tau,\varepsilon) b_{21}(\tau) \Pi_{1m-1}(\tau,\varepsilon) d\tau, \quad m = 1,2,\ldots.$$

Функции $A_{11}(t_1,t_2)$, $A_{21}(t_1,t_2)$ в симметричных точках имеют равные значения, следовательно, функции $\Pi_1(t,\varepsilon)$, $\Pi_2(t,\varepsilon)$ тоже имеют одинаковые оценки в симметричных областях. Исходя из этого оценку проведем только для $\Pi_1(t,\varepsilon)$ и путь интегрирования тоже определим только для $\Pi_1(t,\varepsilon)$, а для $\Pi_2(t,\varepsilon)$ определяется симметрично.

Пусть $t \in H$, то $\{p_1(t_0,t)\}$ состоит из части линии уровня $\{C_{11}\}$ соединяющая точки $(t_0;0)$, $(t_1;t_2^*)$ и отрезка соединяющая точки $(t_1;t_2^*)$, $(t_1;t_2)$.

Оценим первые приближения. Имеем

1. Пусть $t \in H_1$, то

$$|\Pi_{11}(t,\varepsilon)| \le |v_1^0| |E_1(t,t_0,\varepsilon)| \le \widetilde{C}_2 |v_1^0|, \ \widetilde{C}_2 = \max\{E_1(t,t_0,\varepsilon), t \in H_1\}.$$

Также,

$$\widetilde{C}_1 |v_1^0| \le |\Pi_{11}(t,\varepsilon)|, \ \widetilde{C}_1 = \min\{E_1(t,t_0,\varepsilon), t \in H_1\}.$$

2. Пусть $t \in H_0 \cup \overline{H}_1$, то

$$0 \le |\Pi_{11}(t,\varepsilon)| \le \widetilde{C} |v_1^0| e^{\frac{1}{\varepsilon}A_{11}(t_1,t_2)} \le \widetilde{C}\varepsilon^n, \ n \in \mathrm{N}\ .$$

Аналогично

$$\widetilde{C}_1 |v_2^0| \le |\Pi_{21}(t,\varepsilon)| \le \widetilde{C}_2 |v_2^0|, \ t \in \overline{H}_1,$$

$$0 \le |\Pi_{21}(t,\varepsilon)| \le \widetilde{C}\varepsilon^n, \ t \in H_0 \cup H_1.$$

Предположим

$$|\Pi_{1m}(t,\varepsilon)| \le a_m(\varepsilon)\omega_1(t,\varepsilon), \ |\Pi_{2m}(t,\varepsilon)| \le a_m(\varepsilon)\omega_2(t,\varepsilon),$$

где $a_m(\varepsilon)$ – некоторая положительная функция от ε, причем $a_1(\varepsilon) = \widetilde{C}_2$;

$$\omega_1(t,\varepsilon) = \begin{cases} |v_1^0|, \ t \in H_1; \\ \varepsilon^n, \ t \in H_0; \\ \varepsilon, \ t \in \overline{H}_1, \end{cases} \quad \omega_2(t,\varepsilon) = \begin{cases} |v_2^0|, \ t \in \overline{H}_1; \\ \varepsilon^n, \ t \in H_0; \\ \varepsilon, \ t \in H_1. \end{cases}$$

Для $\Pi_{1m+1}(t,\varepsilon)$, $\Pi_{2m+1}(t,\varepsilon)$ получим оценки

$$|\Pi_{1m+1}(t,\varepsilon)| \le a_{m+1}(\varepsilon)\omega_1(t,\varepsilon), \ |\Pi_{2m+1}(t,\varepsilon)| \le a_{m+1}(\varepsilon)\omega_2(t,\varepsilon),$$

где $a_{m+1}(\varepsilon) = \widetilde{C} + \widetilde{C}a_m(\varepsilon)\cdot\varepsilon$. При $\varepsilon \le \dfrac{1}{2\widetilde{C}}$, следует, что $\forall m \in \mathrm{N} : a_{m+1}(\varepsilon) \le 2\widetilde{C}$. Следовательно $|\Pi_{1m}(t,\varepsilon)| \le 2\widetilde{C}_2\omega_1(t,\varepsilon)$, $|\Pi_{2m}(t,\varepsilon)| \le 2\widetilde{C}_2\omega_2(t,\varepsilon)$.

Аналогично доказываются оценки

$$\widetilde{C}_1\omega_3(t,\varepsilon) \le \left|\Pi_{1m}(t,\varepsilon)\right|,\ \widetilde{C}_1\omega_4(t,\varepsilon) \le \left|\Pi_{2m}(t,\varepsilon)\right|,$$

где $\omega_3(t,\varepsilon) = \begin{cases} \left|v_1^0\right|, t \in H_1; \\ 0, t \in H_0 \cup \overline{H}_1, \end{cases}$, $\omega_4(t,\varepsilon) = \begin{cases} \left|v_2^0\right|, t \in \overline{H}_1; \\ 0, t \in H_0 \cup H_1. \end{cases}$

В итоге получим

$$\begin{cases} \widetilde{C}_1\left\|v^0\right\| \le \left\|\Pi_m(t,\varepsilon)\right\| \le 2\widetilde{C}_2\left\|v^0\right\|, t \in H_1 \cup \overline{H}_1; \\ 0 \le \left\|\Pi_m(t,\varepsilon)\right\| \le 2\widetilde{C}\varepsilon^n, t \in H_0, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (12)$$

По методу индукции нетрудно доказать оценку

$$\left\|\Pi_m(t,\varepsilon) - \Pi_{m-1}(t,\varepsilon)\right\| \le b_m(\varepsilon)\omega_5(t,\varepsilon),$$

где $b_m(\varepsilon) = \widetilde{C}b_{m-1}(\varepsilon)\cdot\varepsilon$, $b_1(\varepsilon) = \widetilde{C}$, $\omega_5(t,\varepsilon) = \begin{cases} \left\|v^0\right\|, t \in H_1 \cup \overline{H}_1; \\ \varepsilon^n, t \in H_0, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$. При $\widetilde{C}\varepsilon < 1$ последовательность $\{\Pi_m(t,\varepsilon)\}$ равномерно сходится к некоторой функции $\Pi(t,\varepsilon) \in Q(H)$, которая является решением задачи (7)-(9) и для этой функции согласно (12) справедлива оценка (11).

Т е о р е м а 2. Пусть выполняются условия I-V. Тогда: 1) решение задачи (8)-(10) существует в $Q(H)$ и единственно; 2) для $y(t,\varepsilon)$ справедлива оценка

$$0 \le \left\|y(t,\varepsilon)\right\| \le \widetilde{C}\varepsilon,\ t \in H. \quad (13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задача (8)-(10) представима в виде

$$y(t,\varepsilon) = \int\limits_{p(t_0,t)} V(t,\tau,\varepsilon)[B(\tau)y(\tau,\varepsilon) + g(\tau)]d\tau, \quad (14)$$

где $V(t,\tau,\varepsilon) = diag\left(\exp\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^t \lambda_1(s)ds, \exp\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^t \lambda_2(s)ds\right)$; $p(t_0,t)$ – произвольная путь интегрирования, соединяющая точки t_0 и $t \in H$.

Для (14) применим метод последовательных приближений. Последовательные приближения определим так:

$$y_0(t,\varepsilon) = 0,$$

$$y_m(t,\varepsilon) = \int\limits_{p(t_0,t)} V(t,\tau,\varepsilon)[B(\tau)y_{m-1}(\tau,\varepsilon) + g(\tau)]d\tau,$$

$$y_m = \mathrm{colon}(y_{1m}, y_{2m}),\ m = 1,2,\ldots.$$

Определим пути интегрирования, как и в Теореме 1. Оценим первые приближения.

Пусть $t \in H$. Тогда

$$\left|y_{11}(t,\varepsilon)\right| \le \left|\int\limits_{t_0}^{t_1} e^{\frac{1}{\varepsilon}[A_1(t)-A_1(\tau)]}g(\tau)d\tau\right| + \left|\int\limits_{t_2^*}^{t_2} e^{\frac{1}{\varepsilon}[A_1(t)-A_1(\tau)]}g(\tau)d\tau\right|.$$

Пусть $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, $\tau_1,\tau_2 -$ действительные переменные и $g(\tau) = g_1(\tau_1,\tau_2) + ig_2(\tau_1,\tau_2)$, тогда первый интеграл сводится к оценке интегралов вида

$$J_1(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t_1} G(\tau_1)\cos\frac{A_{12}(\tau_1,\varphi_1(\tau_1,C_{11}))}{\varepsilon}d\tau_1,\ J_2(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t_1} G(\tau_1)\sin\frac{A_{12}(\tau_1,\varphi_1(\tau_1,C_{11}))}{\varepsilon}d\tau_1,$$

где $G(\tau_1) \in Q(H)$.

Произведем замену $\frac{A_{12}(\tau_1,\varphi_1(\tau_1,C_{11}))}{\varepsilon} = h$, $\tau_1 = F(\varepsilon h)$, $d\tau_1 = \varepsilon F'(\varepsilon h)dh$;

$$\tau_1 = t_0,\ h = 0;\ \tau_1 = t_1,\ h = \frac{A_{12}(t_1,\varphi_1(t_1,C_{11}))}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon}.$$

Таким образом, учитывая условие V, имеем

$$\left|J_1(t,\varepsilon)\right| \le \tilde{C}\varepsilon \int_0^{q/\varepsilon} \left|F'(\varepsilon h)\right| dx \le \tilde{C}\varepsilon\ , \ \left|J_2(t,\varepsilon)\right| \le \tilde{C}\varepsilon \int_0^{q/\varepsilon} \left|F'(\varepsilon h)\right| dh \le \tilde{C}\varepsilon$$

или

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} e^{\frac{1}{\varepsilon}[A_1(t)-A_1(\tau)]} g(\tau)d\tau \right| \le \tilde{C}\varepsilon\ .$$

Для второго интеграла получим

$$\left| \int_{t_2^*}^{t_2} e^{\frac{1}{\varepsilon}[A_1(t)-A_1(\tau)]} g(\tau)d\tau \right| \le \tilde{C} \int_{t_2^*}^{t_2} e^{\frac{1}{\varepsilon}[A_{11}(t_1,t_2)-A_{11}(t_1,\tau_2)]} d\tau_2\ .$$

К разнице $A_{11}(t_1,t_2) - A_{11}(t_1,\tau_2)$ применим теорему о конечных приращениях

$$A_{11}(t_1,t_2) - A_{11}(t_1,\tau_2) = \frac{\partial A_{11}(t_1,\theta_1)}{\partial t_2}(t_2-\tau_2),\ \tau_2 < \theta_1 < t_2 .$$

По условию $\dfrac{\partial A_{11}(t_1,\theta_1)}{\partial t_2} = -\operatorname{Im}\lambda_1(t) < 0$ и непрерывна. Из сказанного следует, что существует постоянная $0 < p$ – не зависящая от ε и $\dfrac{\partial A_{11}(t_1,\theta_1)}{\partial t_2} = -p < 0$. В итоге

$$\left| \int_{t_2^*}^{t_2} e^{\frac{1}{\varepsilon}[A_1(t)-A_1(\tau)]} g(\tau)d\tau \right| \le \tilde{C} \int_{t_2^*}^{t_2} e^{\frac{1}{\varepsilon}[A_{11}(t_1,t_2)-A_{11}(t_1,\tau_2)]} d\tau_2 \le \tilde{C} \int_{t_2^*}^{t_2} e^{-\frac{1}{\varepsilon}p(t_2-\tau_2)} d\tau_2 \le \tilde{C}\varepsilon\ .$$

Окончательно

$$0 \le \left|y_{11}(t,\varepsilon)\right| \le \tilde{C}\varepsilon\ .$$

Для $y_{21}(t,\varepsilon)$ имеем аналогичную оценку.

Предполагая

$$\left\|y_m(t,\varepsilon)\right\| \le a_m(\varepsilon)\cdot\varepsilon\ ,$$

где $a_m(\varepsilon)$ – некоторая положительная функция от ε, причем $a_1(\varepsilon) = \tilde{C}$. Для $y_{m+1}(t,\varepsilon)$ получим

$$\left\|y_{m+1}(t,\varepsilon)\right\| \le a_{m+1}(\varepsilon)\cdot\varepsilon\ ,$$

где $a_{m+1}(\varepsilon) = \tilde{C} + \tilde{C}a_m(\varepsilon)\cdot\varepsilon$. При $\varepsilon \le \dfrac{1}{2\tilde{C}}$, следует, что $\forall\, m \in \mathbb{N} : a_{m+1}(\varepsilon) \le 2\tilde{C}$. Тогда

$$\left\|y_m(t,\varepsilon)\right\| \le 2\tilde{C}\varepsilon\ . \tag{15}$$

Для доказательства равномерной сходимости последовательных приближений доказывается оценка

$$\left\|y_m(t,\varepsilon) - y_{m-1}(t,\varepsilon)\right\| \le b_m(\varepsilon)\cdot\varepsilon\ ,$$

где $b_m(\varepsilon) = \tilde{C}b_{m-1}(\varepsilon)\cdot\varepsilon$, $b_1(\varepsilon) = \tilde{C}$. При $\tilde{C}\varepsilon < 1$ последовательность $\{y_m(t,\varepsilon)\}$ равномерно сходится к некоторой функции $y(t,\varepsilon) \in Q(H)$, которая является решением задачи (8)-(10) и для этой функции согласно (15) справедлива оценка (13).

5. Вывод

На основе Теорем 1,2 (оценки (11),(13)) и учитывая, что $x(t,\varepsilon) - \varphi(t) = T(t)[\Pi(t,\varepsilon) + y(t,\varepsilon)]$, имеем

$$\tilde{C}_1\left\|x^0 - \varphi(t_0)\right\| \le \left\|x(t,\varepsilon) - \varphi(t)\right\| \le \tilde{C}_2\left\|x^0 - \varphi(t_0)\right\|,\ t \in H_1 \cup \overline{H}_1\,;$$

$$0 \le \left\|x(t,\varepsilon) - \varphi(t)\right\| \le \tilde{C}\varepsilon,\ t \in H_0 .$$

Таким образом, полученные оценки показывают, что для решения задачи (1)-(2), согласно определению 2 существует простирающийся симметричный пограничный слой в области $H_1 \cup \overline{H}_1$.

Использованные источники

1. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. // Вестник КГНУ. -Серия 3, Выпуск 6. –Бишкек, 2001г. -С. 190-200.

2. Алыбаев К.С., Нарбаев М.Р. Развитие асимптотических методов для сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости //Исслед. по интегро- дифференц. уравнениям. -Бишкек: Илим, 2007. Вып. 35. -С.105-109.
3. Анарбаева Г.М. Асимптотическое поведение решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости положение равновесия. Дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. -Бишкек, 1993. -120с.

4. Каримов С.К. Асимптотика решений некоторых дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений». Дисс. … доктора физ.-мат. наук: 01.01.02. -Ош, 1983. -260с.

5. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений содержащих малые параметры при производных //Мат. сб. -1952. -Т.31(73), №3. –С.575-586.
6. Турсунов Д.А. Асимптотика решений сингулярно возмущенных нелинейных уравнений, в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют кратный полюс. // Изд. «Эверо», «Актуальные проблемы дифферен. урав. и мат. физики». Алма-Ата, 2005. –С.200.

7. Шишкова М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. // Докл. АН СССР.-1973.-Т.209, №3.-С.576-579.