УДК 624.121

Е.Т.БЕСИМБАЕВ, З.Д. ДЖАКЫПОВА

E-mail: ksucta@élcat.kg

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ РАВНОМЕРНО-РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Байтүптүн конструкциясынын чыңалган-деформацияланган абалынын маселелерин негиздиктин ар кандай моделдерин пайдаланып чечүүлөр каралган.

Рассмотрено решение задачи напряженно-деформированного состояния конструкции фундаментов с использованием различных моделей основания.

Solutions of tasks for the tensioned-deformed conditions of basement structures, by using different models of ground, are considered.

Динамические контактные задачи для фундаментных балок и плит на упругом полупространстве при осесимметричных гармонических колебаниях конструкций фундаментов с использованием различных моделей основания были решены Л.П.Винокуровым, Б.Г.Кореневым, Н.А.Николаенко, В.М.Сеймовым, А.С.Яковлевым, А.П.Филипповым другими учеными /2/.

Рассмотрим решение задачи напряженно-деформированного состояния бесконечной плите со свободным краем для различных моделей оснований и равномерно распределенной нагрузки.

Деформация бесконечной плиты от заданной нагрузки можно определить из выражения:

$$\omega_{\infty}(x,y) = (4\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty}\int \varepsilon^{-1}(\xi,\eta) Q_0(\xi,\eta) e^{-i\xi x - i\eta y} d\xi d\eta,$$

(1)

где $Q_0((\xi,\eta)$ – трансформанта Фурье заданной нагрузки $q_0(x,y)$.)

Для нагрузки, равномерно распределенной по площадке размером $2a_0$ *x* $2b_0$ с центром в точке (x_0,y_0) и интенсивностью $q=1$:

$$Q_0(\xi,\eta) = 4q(\xi,\eta)^{-1} Sin\xi a_0 \cdot Sin\eta b_0 e^{i\xi x_0 + i\eta y_0}$$

(2)

Выражения прогиба, изгибающих моментов и приведенных поперечных сил в этом случае с учетом (2) запишутся:

$$\omega\ (x,y)=\int_0^\infty\int\frac{4qSin\xi a_0Sin\eta b_0}{\xi\cdot\eta}\cdot\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\cos\xi(x-x_0)\cos\eta(y-y_0)d\xi d\eta}{\left[\left(\xi^2+\eta^2\right)^2+1+C(\xi,\eta)\right]};$$

$$M_{x,\infty}(x,y)=\int_0^\infty\int\frac{4qSin\xi a_0Sin\eta b_0}{\xi\cdot\eta}\cdot\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\left(\xi^2+\gamma\eta^2\right)\cos\xi(x-x_0)\cos\eta(y-y_0)d\xi d\eta}{\left[\left(\xi^2+\eta^2\right)^2+1+C(\xi,\eta)\right]};$$

$$M_{y,\infty}(x,y)=\int_0^\infty\int\frac{4qSin\xi a_0Sin\eta b_0}{\xi\cdot\eta}\cdot\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\left(\eta^2+\gamma\xi^2\right)\cos\xi(x-x_0)\cos\eta(y-y_0)d\xi d\eta}{\left[\left(\xi^2+\eta^2\right)^2+1+C(\xi,\eta)\right]};$$

$$Q_{x,\infty}(x,y)=\int_0^\infty\int\frac{4qSin\xi a_0Sin\eta b_0}{\xi\cdot\eta}\cdot\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\left[\xi^2+(2-\gamma)\eta^2\right]\cos\xi(x-x_0)Sin\eta(y-y_0)d\xi d\eta}{\left[\left(\xi^2+\eta^2\right)^2+1+C(\xi,\eta)\right]};$$

$$Q_{y,\infty}(x,y)=-\int_0^\infty\int\frac{4qSin\xi a_0Sin\eta b_0}{\xi\cdot\eta}\cdot\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\left[\eta^2+(2-\gamma)\xi^2\right]Sin\xi(x-x_0)\cos\eta(y-y_0)d\xi d\eta}{\left[\left(\xi^2+\eta^2\right)^2+1+C(\xi,\eta)\right]}$$

(3)

Для улучшения сходимости несобственных интегралов в полученных формулах и в дальнейшем использован известный прием /40/, с помощью которого исходный интеграл представляется в виде суммы двух слагаемых. Первые слагаемые соответствуют модели Винклера, а вторые – представляют собой добавку, двойной интеграл, сходящийся быстрее, чем исходный.

Трансформанты Фурье дополнительных нагрузок зависят от граничных условий и в рассматриваемом случае равны:

$$Q_{1k\pm}(\xi,\eta)=-\sum_{k=1}^{k}A_{1k\pm}(\xi)\left(\eta^2+\gamma\xi^2\right)e^{i\eta[\pm(2k-1)b]},$$

(4)

$$Q_{2k\pm}(\xi,\eta)=-\sum_{k=1}^{k}A_{2k\pm}(\xi)i\eta\left(\eta^2+(2-\gamma)\xi^2\right)e^{i\eta[\pm(2k-1)b]},$$

(5)

Тогда выражения для прогибов в случае свободного края полос примут вид:

$$\omega(x,y)=\omega_\infty(x,y)+\sum_{k=1}^{k}\sum_{j=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}A_{jk\pm}(\xi)\varphi_{0jk}(\xi,y,\pm(2k-1)b)e^{-i\xi x}d\xi,$$

(6)

где

$$\varphi_{01k\pm}\left(\xi y,\pm(2k-1)b\right)=t_2+\gamma\xi^2 t_0,$$
$$\varphi_{02k\pm}\left(\xi y,\pm(2k-1)b\right)=\left[t_2+(2-\gamma)\xi^2 t_1\right],$$
$$t_\mu=\pi^{-2}\int_0^\infty \eta^\mu\varepsilon^{-1}(\xi,\eta)\cos\eta\left[y\mp(2k-1)b\right]d\eta,(\mu=0;2)$$
$$t_\mu=\pi^{-2}\int_0^\infty \eta^\mu\varepsilon^{-1}(\xi,\eta)Sin\eta\left[y\mp(2k-1)b\right]d\eta,(\mu=1;3)$$

(7)

Выражения (6) содержат неизвестные функции $A_{jk\pm}(\xi)$,которые можно определить, используя граничные условия на контурах полос.

На линиях примыкания полос должны удовлетворяться граничные условия:

$$L_j(y,x)\omega(x,y)\Big|_{y=\pm(2K-1)b}=0,\quad (j=1;2)$$

(8)

Подставим (6) в (8) и введем следующие обозначения:

$$\varphi_{njk\pm}\left(\xi,y,\pm(2k-1)b\right)=e^{i\xi x}L_j(y,x)\left[\varphi_{0jk\pm}\left(\xi,y,\pm(2k-1)b\right)=e^{i\xi x}\right],$$

(9)

$$F_{jk}(x,y)=-L_j(y,x)\left[\omega_\infty(x,y)\right],(j=1;2)$$

(10)

Здесь индекс n соответствует номеру прогиба или усилия; n=0 соответствует прогибу ω; $n=-1$ – изгибающему моменту M_y ; n=2 – изгибающему моменту M_x; n=3 – приведенной поперечной силе Q_y ; $n=4$ – приведенной поперечной силе Q_x; j – номер типа нагрузки ; k – номер разреза.

Положив в (6) $y=\pm(2k-1)b$, получим следующие системы интегральных уравнений относительно неизвестных функций $A_{jk\pm}(\xi)$ при свободном опирании полос:

$$\sum_{k=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}A_{jk\pm}(\xi)\varphi_{1jk\pm}\left(\xi,\pm(2k-1)b,\pm(2k-1)b\right)e^{-i\xi x}d\xi=F_{1k\pm}\left(x,\pm(2k-1)b\right)\right],$$
$$\sum_{k=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}A_{jk\pm}(\xi)\varphi_{3jk\pm}\left(\xi,\pm(2k-1)b,\pm(2k-1)b\right)e^{-i\xi x}d\xi=F_{2k\pm}\left(x,\pm(2k-1)b\right)\right],$$

(11)

Приведем эти системы к системам алгебраических уравнений. Для этого умножим все уравнения систем (11) на $e^{i\lambda x}$ и проинтегрируем. Учитывая соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\xi-\lambda)x}dx=\delta(\xi-\lambda)\quad \text{и}\quad \int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\delta(\xi-\lambda)d\eta=f(\lambda),$$

(12)

запишем вместо (11) следующие системы алгебраических уравнений для свободных краев полос:

$$\sum_{k=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{2}A_{jk\pm}(\lambda)\varphi_{1jk\pm}\left(\lambda,\pm(2k-1)b,\pm(2k-1)b\right)=f_{1k\pm}\left(\lambda,\pm(2k-1)b\right)\right],$$
$$\sum_{k=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{2}A_{jk\pm}(\lambda)\varphi_{3jk\pm}\left(\lambda,\pm(2k-1)b,\pm(2k-1)b\right)=f_{2k\pm}\left(\lambda,\pm(2k-1)b\right)\right].$$

(13)

где

$$f_{1k\pm}\left(\lambda,\pm(2k-1)b\right)=\int_{-\infty}^{\infty}F_{1k\pm}\left(x,\pm(2k-1)b\right)e^{i\lambda x}dx,$$
$$f_{2k\pm}\left(\lambda,\pm(2k-1)b\right)=\int_{-\infty}^{\infty}F_{2k\pm}\left(x,\pm(2k-1)b\right)e^{i\lambda x}dx.$$

(14)

Решая системы (13), определим функции $A_{jk\pm}(\lambda)$. Подставив значения этих функций в (6), получим выражения прогибов, а выражения усилий в полосах можно получить, применив к (6) операторы граничных условии *L(x,y)*.

Как следует из полученных выражений, для определения прогибов и внутренних усилий в полосах составной частью их являются усилия и деформации для бесконечной плиты. Поэтому приведем исследования усилий и деформаций в бесконечной плите для различных моделей оснований и равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $q=100$ по площадке размером 0,1х0,1 , приложенной в точке ($x_0=0,y_0=0$), рис.1.

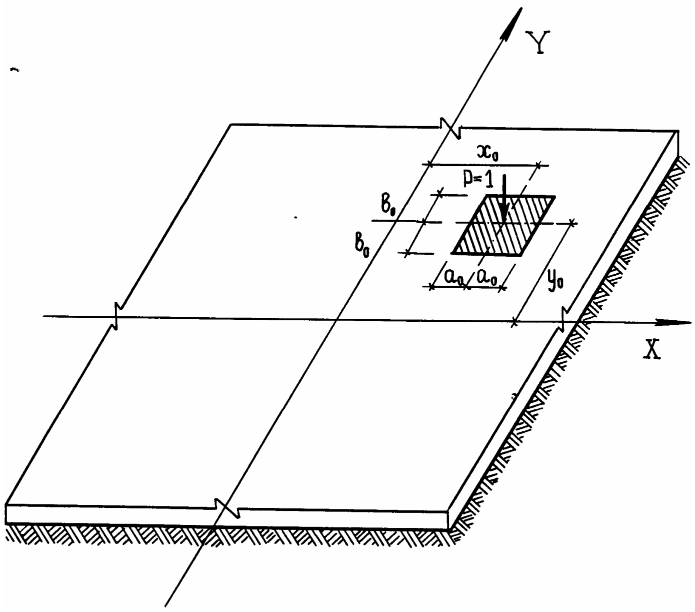

Рис.1. Расчетная схема бесконечной плиты, лежащей на упругом основании и загруженной произвольной нагрузкой

В качестве линейно-деформируемого основания исследуем следующие типы моделей:

– изотропное полупространство;

– трансверсально-изотропное полупространство;

– комбинированное изотропное основание;

– комбинированное трансверсально-изотропное основание.

Как отмечалось выше, трансверсально-изотропное полупространство характеризуется модулями упругости и сдвига различными в вертикальном E_Z , G_Z и горизонтальном E_r. , G_r направлениях. Степень анизотропии K_E упругого полупространства характеризуется отношением модуля упругости в вертикальном направлении E_Z к модулю упругости в горизонтальном направлении E_r

$K_E = E_Z/E_r$.

(14)

В случае равенства модулей упругостей $E_Z=E_r$ получим частный случай анизотропного основания – изотропное полупространство. Модули сдвигов для изотропного случая при $K_E=1$ определяются по выражению /26/

$G_Z = G_r = E/2(1+\gamma_0)$,

(15)

где E и γ_0 – модуль упругости и коэффициент Пуассона изотропного основания.

Величина модуля сдвига G_r для анизотропного основания определяется по (15), а G_Z является независимой величиной, которая определяется экспериментально, но в силу того, что реальные грунты имеют всегда довольно низкое сопротивление сдвигу, в дальнейшем можно принимать всегда его наименьшее значение для всякого отношения модулей упругости K_E. Отсюда принимается:

при $K_E < 1$ модуль сдвига

$G_Z = E_Z/ 2(1+\gamma_Z)$,

(16)

при $K_E > 1$ модуль сдвига

$G_Z = E_Z/ 2(K_E+\gamma_Z)$.

(17)

Анизотропные основания также характеризуются коэффициентами Пуассона в вертикальном γ_Z и горизонтальном γ_Z направлениях и для рассматриваемого случая трансверсально-изотропного полупространства они принимаются равными $\gamma_Z = \gamma_r$.

В зависимости от того, какие грунты служат основанием для плиты, значения модулей упругостей могут меняться от значения, равного 50 МПа для гравелистых песков крупной и средней крупности /1/, до значения 5,0 МПа для суглинков, а коэффициенты Пуассона грунта принимают значения от 0,30 для песков и супесей до 0,42 для глинистых грунтов. Исходя из этих характеристик найдем прогиб и другие расчетные величины при различных значениях физических параметров, которые примем следующими: E_Z = 2,0 МПа ;10 МПа ,50 МПа ; E_r= 10 МПа ; γ_Z=γr=0,30. Коэффициент Пуассона материала плиты $\gamma = 1/6$.

На основе этих данных построены эпюры прогибов и изгибающих моментов в бесконечной плите (рис.1), лежащей на вышеперечисленных моделях основания при действии заданной нагрузки.

На рис.1 приведены эпюры изгибающих моментов $M_x(x,y)$ в бесконечной плите, лежащей на трансверсально-изотропном полупространстве при действии на плиту равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q=100 по площадке 0,1x0,1 с центром в точке (x_0=0, y_0=0): кривая 1 – при K_E=1 ; кривая 2 – при K_E=0,2 ; кривая 3 – при K_E=5.

Полученные результаты показывают, что прогибы плиты, лежащей на упругом полупространстве (рис.1, кривые 2, 3, 6) меньше в 1,2 раза прогибов плиты на комбинированном основании (рис.1, кривые 1, 4, 5). Например, значение прогиба в точке x=0 для полупространства равно 0,276 (кривая 2), а для комбинированного основания – 0,342 (кривая 1). Значение изгибающего момента $M_x(x,y)$ в сечении x=0,4 для бесконечной плиты в случае модели основания в виде трансверсально-изотропного полупространства равно 0,062 (рис.1, кривая 1 при K_E=1), а для комбинированного основания – 0,083 (рис.1, кривая 2 при K_E=l). Отсюда следует, что при расчете конструкций на упругом основании выбор расчетной модели необходимо производить с учетом реальных свойств рассматриваемого грунтового основания.

Из рассмотреннных эпюр также видно, что учет анизотропии основания приводит к существенному изменению значений деформаций изгибающих моментов. Так, например, значения изгибающего момента $M_x(x,y)$ в сечении x=0 увеличивается от значения 0,347 при K_E=0,2 (рис.1, кривая 2) до 0,369 при K_E=5 (рис.1, кривая 3).

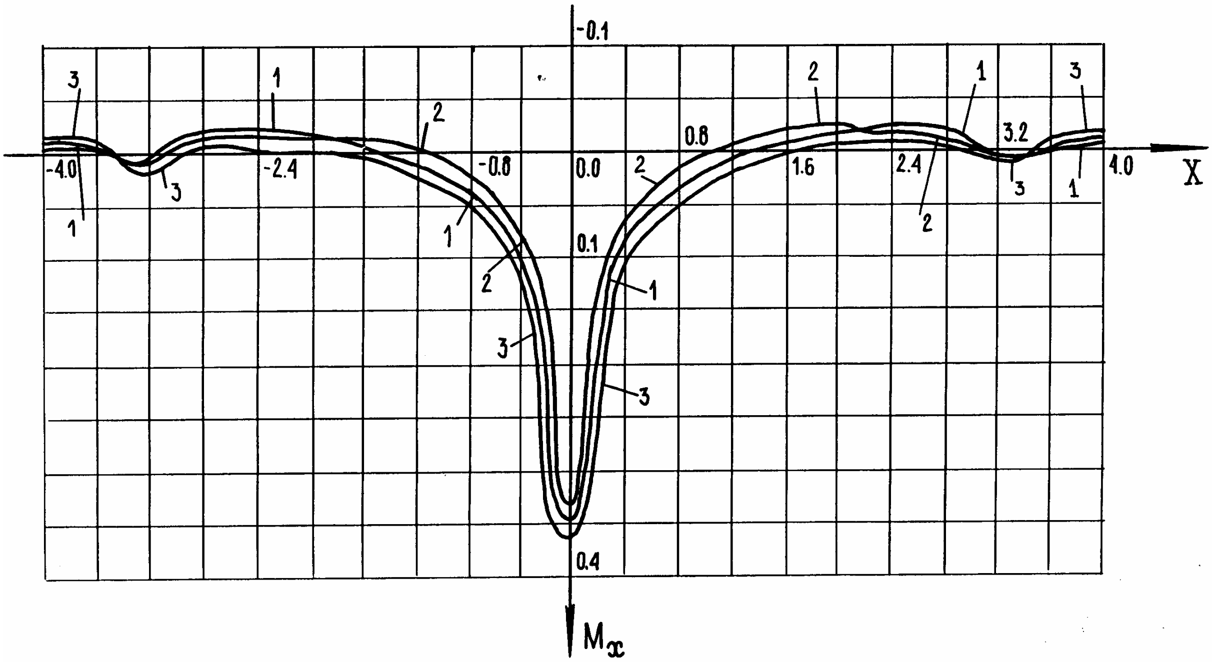

Рис.1. Эпюры загибающих моментов в бесконечной плите, загруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q=100 по площадке размером 0,1х0,1, с центром в точке (x_O, y_O)

Таким образом, на примере расчета бесконечной плиты, исследованы свойства и влияние принятой модели линейно-деформируемого основания на распределение деформаций и усилий в бесконечной плите. Также исследовано влияние анизотропии грунтового основания на распределение прогибов и изгибающих моментов при различных значениях показателя степени анизотропии K_E. Разработаны алгоритм и программа расчета бесконечной плиты с учетом вышеизложенных свойств и моделей упругого линейно-деформируемого основания.

Список литературы

1. Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К., Аубакиров С.Б. Приближенный расчет устойчивости неоднородно-слоистых пород вблизи штрека несимметричного профиля // Проблемы механики подземных сооружений. – Тула: ТулПТИ. – 1982. – С. 8-9.
2. Дюсембаев И.Н. К расчету бесконечной полосы, лежащем на упругом анизотропном слоистом основании// Сб.научн.тр. Центральной исследовательской лаборатории строительных материалов. – Алматы: Бастау, 2002. – С.6-11.