УДК 517.958

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ И ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

АБЛАБЕКОВ Б.С.
izvestiya@ktu.aknet.kg

Исследуются вопросы существования и единственности классического решения задачи Коши уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде.

1. Уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде. Как известно, [12] уравнение фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде описывается следующим уравнением:

$$\beta_0 \frac{\partial p}{\partial t} - div[\frac{k}{\mu} gradp + \eta\beta_0 \frac{\partial}{\partial t} gradp] = 0, \qquad (1.1)$$

где $p(x,t)$ - давление жидкости в трещинах; $k(x)$ - коэффициент проницаемости трещин; $\beta_0(x)$ - коэффициент сжимаемости жидкости;

$\mu(x)$ - вязкость жидкости, $\eta(x)$ -коэффициент пьезопроводности.

Если среда однородна то из уравнения (1.1) получаем

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \eta\Delta p - \chi \frac{\partial}{\partial t}\Delta p = 0, \qquad (1.2)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3, t \in R^1, \Delta$ - оператор Лапласа по переменным x_1, x_2, x_3.

Если анизотропия пористой среды связаны с естественной слоистостью и значит, проницаемость в вертикальном направлении значительно меньше, чем в горизонтальном, то уравнение (1,2) имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \eta\Delta_2 p - \chi \frac{\partial}{\partial t}\Delta_2 p = \chi_0 p_{x_3x_3}, \qquad (1.3)$$

где Δ_2 - оператор Лапласа по переменным x_1, x_2.

Для последующего исследования полезно перейти к безразмерным переменным и переписать уравнение (1.2) так

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \frac{\partial}{\partial t}\Delta u = 0, \qquad (1.4)$$

сохранив для новых переменных прежние обозначения $t, \quad x_j, \quad j = 1,2,3$.

Задача Коши для неклассических составных уравнений типа (1) продолжает привлекать внимание многих исследователей в силу двух обстоятельств. Во-первых, исследование этих уравнений начато сравнительно недавно и еще далек от завершения, что обуславливает математический интерес к ним. Во-вторых, уравнение типа (1) возникают при рассмотрении целого ряда задач фильтрации и почвенных влаг, представляющих прикладной интерес. В связи с этими обстоятельствами следует отметить особую роль задач разрешимых в явном виде.

В этой работе продолжается исследование начатые в [5-7] и посвящена рассмотрению задачи Коши для двумерного уравнения фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде.

2. Фундаментальное решение и задача Коши. В этом пункте мы изучим фундаментальное решение двумерного уравнение фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде и на его основе построим решение соответствующей задачи Коши.

Найдем фундаментальное решение оператора L, т.е. обобщенную функцию $E(x,t) \in D'(R^3)$, удовлетворяющую уравнению

$$LE \equiv D_t(\Delta_2 E - E) + \Delta_2 E = \delta(x,t). \tag{2.1}$$

Обозначим через $\widetilde{E}(\xi,t)$ преобразование Фурье функции E(x,t) по переменной x.

Тогда функция $\widetilde{E}(\xi,t)$ будет удовлетворять уравнению

$$D_t\widetilde{E}(\xi,t) + \frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}\widetilde{E}(\xi,t) = -\frac{1}{1+|\xi|^2}1(\xi)\times\delta(t),$$

Отсюда, используя фундаментальное решение дифференциального

оператора $\dfrac{d}{dt}+a$, имеем

$$\widetilde{E}(\xi,t) = -\frac{\theta(t)}{1+|\xi|^2}\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}t\right).$$

При любом $t \geq 0$ функция $\widetilde{E}(\xi,t) \in L_{loc}(R^2)$ и $\lim\limits_{|\xi|\to\infty}\widetilde{E}(\xi,t) = 0$.

Применив формулу обратного преобразования Фурье к функции $\widetilde{E}(\xi,t)$ в пространстве

$$E(x,t) = F_\xi^{-1}\left[\widetilde{E}(\xi,t)\right] = \frac{1}{(2\pi)^2}F_\xi[\widetilde{E}(-\xi,t)] =$$

$$= -\frac{\theta(t)}{(2\pi)^2}\int\limits_{R^2}\frac{1}{1+|\xi|^2}\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}t + i<\xi,x>\right)d\xi. \tag{2.2}$$

При каждом фиксированном *t* фундаментальное решение (3) можно интерпретировать как обобщенную функцию из $S'(R^3)$, действие которой на $\varphi(x) \in S(R^2)$ равно

$$<E,\varphi> = \int\limits_{R^2} E(x,t)\varphi(x)dx. \tag{2.3}$$

Тогда для любой основной функции $\varphi(x) \in S(R^2)$ будет справедливо равенство

$$< (2\pi)^2 E(x,t), \varphi(x) >=< \widetilde{E}(\xi,t), \widetilde{\varphi}(\xi) >,$$

где

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = F[\varphi(x)] = \int_{R^2} \varphi(x) e^{i<x,\xi>} dx$$ - преобразование Фурье функции $\varphi(x)$.

Отсюда находим

$$< (2\pi)^2 E(x,t), \varphi(x) >= -\theta(t) \int_{R^2} \int_{R^2} \varphi(x) \frac{1}{1+|\xi|^2} \exp\left\{ -\frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2} t + i < \xi, x > \right\} d\xi dx =$$

$$= -\theta(t) e^{-t} \lim_{R\to\infty} \int_{R^2} \varphi(x) \left[\int_{U_R(0)} \exp\left\{ \frac{t}{1+|\xi|^2} + i < \xi, x > \right\} \frac{d\xi}{1+|\xi|^2} \right] dx,$$

где $U_R(0) -$ шар радиуса R с центром в точке 0.

Обозначим внутренний интеграл через $J(x,t)$ и вычислим его. Для этого воспользуемся полярными координатами. Положим $\xi_1 = \rho\cos\varphi,\ \xi_2 = \rho\sin\varphi$ $(0 \le \rho \le R,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi)$. Тогда функция $J(x,t)$ примет следующий вид

$$J(x,t) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{i|x|\rho\cos\varphi} \exp\left\{ \frac{t}{1+\rho^2} \right\} \frac{\rho}{1+\rho^2} d\varphi d\rho.$$

Разложив функцию $e^{i<x,\xi>}$ в ряд Тейлора, функцию $J(x,t)$ перепишем в виде

$$J(x,t,R) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^R \frac{\rho}{1+\rho^2} \exp\left\{ \frac{t}{1+\rho^2} \right\} \frac{(i|x|\rho)^k}{k!} d\rho \cdot \frac{2\pi}{\Gamma(1)} Q_k,$$

где $\quad Q_k = \int_0^{\pi} \cos^k \varphi \, d\varphi.$

Отсюда, используя формулы из [3,c], получаем

$$E_2(x,t) = -\frac{\theta(t) e^{-t}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{t|x|}{2} \right)^m \frac{K_m(|x|)}{m!^2}, \qquad (2.4)$$

где функция $K(z)$ - функция Макдональда.

Рассмотрим теперь изолированный трещиновато-пористый пласт, занимающую все пространство R^2 и изучим задачу нахождения давления , вызванные ее начальным состоянием . С математической точки зрения эта задача формулируется следующим образом.

Задача Коши. Найти функцию $u(x,t)$, принадлежащую при некотором γ классу $C^{(2,1)}_{M_\gamma}(Q_T)$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению

$$Lu \equiv D_t(\Delta_2 u - u) + \Delta_2 u = f(x,t), \qquad (2.5)$$

начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^2. \qquad (2.6)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Если $u_0(x) \in C_0^\infty(R^3)$, $\quad f(x,t) \in C_0^\infty(R^3 \times [0,\infty0)$ и финитна по x в R^3, то классическое решение задачи Коши (2.1), (2.2) существует единственно и дается формулой

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{R^2} E_2(x-\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau + \int_{R^2} E_2(x-\xi,t) L_1[u_0](\xi) d\xi, \qquad (2.7)$$

где $L_1 = \Delta_2 - I$.

Доказательство. Построим решение этой задачи, используя фундаментальное решение оператора L. Для этого сначала докажем существование и единственность решения соответствующей обобщенной задачи Коши, затем покажем принадлежность обобщенного решения $C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T)$ и воспользуемся леммой из [3].

Получим решение задачи Коши (2.5),(2.6), воспользовавшись аппаратом теории обобщенных функций.

Сформулируем обобщенную задачу Коши для уравнения (2.5).

Предположим что, существует классическое решение задачи (1),(2), т.е.
существует функция обладающей непрерывными частными производными до третьего порядка и удовлетворяющими уравнению (2.5) при $t>0$ и начальному условию (2.6) при $t=0$.

Справедлива

Лемма 1. Пусть $u(x,t)$ является решениям задачи (2.5), (2.6). Тогда функция $v = \theta(t)u(x,t)$ является решением задачи

$$Lv = \theta(t) f(x,t) + L_1[u_0]\delta(t), \qquad (2.8)$$

$$v\big|_{t<0} = 0. \qquad (2.9)$$

Доказательство. Используя равенство (2.5) и свойство $\delta-$функции, находим

$$v_t = \theta(t)u_t(x,t) + \delta(t)u(x,t) = \theta(t)u_t(x,t) + \delta(t)u_0(x),$$

$$\Delta_2 v = \theta(t)\Delta_2 u,$$

$$\Delta_2 v_t = \theta(t)\Delta_2 u_t + \delta(t)\Delta_2 u = \theta(t)\Delta_2 u + \delta(t)\Delta_2 u_0(x).$$

Отсюда получаем

$$Lv = \theta(t)Lu + \big(\Delta_2 u_0(x) - u_0(x)\big)\delta(t) = \theta(t) f(x,t) + L_1[u_0]\delta(t).$$

А равенство (2.9) является прямым следствием равенства $v = \theta(t)u(x,t)$. Действительно, $v\big|_{t<0} = \theta(t)u\big|_{t<0} = 0$.

Теперь заменим задачу (2.5), (2.6) на обобщенную задачу Коши (2.8), (2.9). В силу условий теоремы для функций f, u_0, существуют свертки правой части уравнения (2.8) с фундаментальным решением оператора L и потому обобщенное решение задачи Коши (2.8), (2.9) существует в $D^{'}(R^2)$ и дается [3] по формуле

$$v(x,t) = E(x,t) * \left[\theta(t)f(x,t) + L_1[u_0](x)\delta(t)\right], \tag{2.10}$$

где $*$ символ означает свертку. Вычислив свертку в (2.10) и положив $v = \theta(x,t)u(x,t)$ приходим к формуле (2.7).

Замечание. Заметим, что требование о гладкости и финитности начальной функции $u_0(x)$ и правой части $f(x,t)$ можно значительно ослабить.

Литература

1.Баренблатт Г.И. О некоторых краевых задачах для уравнений фильтрации жидкости в трещиноватых породах // Прикл. матем. и мех. -1963. -Т. 27, №2. -С. 348-350.
2. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. матем. и мех. -1960. -Т. 24, №5. -С. 852-864.
3. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. - Москва: Наука, 1979.- 318с.
4.Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - Москва: ФМЛ, 1963. -1100с
5.Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболичесих уравнений. – Бишкек: Илим 2001. –182 с.
6. Аблабеков Б.С. Решение двумерной задачи фильтрации жидкости // Вестн. Кыргызск. гос. нац. ун-та. Сер. естественно-техн. науки. –Бишкек. 1999. –Вып.1, Ч.1.-С. 61-65.
7. Аблабеков Б.С.О задаче идентификации коэффициента фильтрации в трещиноватом пласте // Труды международной научной конференции «Развитие информационно-коммуникационных технологий в информационном обществе: состояние и перспективы” Бишкек.2004.- С.236-241.