С.А. Ахметов

Построение трисектрисы угла с помощью циркуля и линейки

В математике есть задачи, которые буквально завораживают каждого человека, кто по воле случая сталкивается с ней. К таким задачам относятся известные классические задачи на построение.

Они поставлены на заре развития геометрии, древнегреческими математиками приблизительно V веке до н.э. К таким задачам относятся: задача об удвоении куба, квадратура круга, трисектриса угла.

О возникновении задачи трисектрисы угла никаких интересных легенд нет. Она появилась в связи с построением правильных многоугольников и с решением задачи архитектуры и строительства. Например: для того, чтобы построить правильный девятиугольник, необходимо разделить угол на три равные части, т.е. 360^0:9=120^0:3.

Многие древнегреческие математики искали пути построения трисектрисы угла и они нашли разные способы построения, но построить трисектрису угла циркулем и линейкой никому не удалось.

Древнегреческий математик Папп Александрийский задачу трисектрисы угла относил к «пространственным» построениям, т.е. к построениям, выполненным с помощью конических сечений.

Первое решение этой задачи принадлежит древнегреческому математику, жившему в V веке до н.э., Гиппею, для решения которой он применял кривую, изобретенную самим, эту кривую использовали для решения квадратуры круга. Позже для решения трисектрисы угла эту кривую применял Динострат. Кривая называется квадратрикой Динострата в честь древнегреческого математика, родившегося приблизительно 370 лет до н.э.

Архимед решил эту задачу с помощью изобретенной самим кривой, так называемой спиралью Архимеда, эту же кривую он использовал для решения задачи квадратуры круга. Он также предложил другое решение задачи трисектрисы угла способом «вставки». В его решении нужно вставить отрезок данной длины между прямой и окружностью.

Другой древнегреческий математик Никомед с помощью своей кривой решил задачу трисектрисы угла. Эта кривая в его честь называется «Конхоидой Никомеда».

В связи с постепенным формированием алгебры арабские математики проявляли всё больший интерес к уравнениям, особенно к кубическому уравнению.

В XI веке ими было получено уравнение трисектрисы угла, т.е. соотношения между sin3α и sinα, и тем самым было показано, что задача трисектрисы угла сводится к решению кубического уравнения.

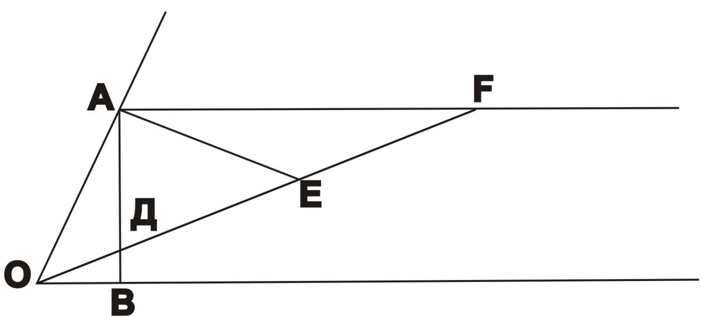
Свое решение с помощью кубического уравнения предложил Декрат. С помощью кривой, так называемой «Улиткой Паскаля» дал решение трисектрисы угла Этьен Паскаль, отец знаменитого математика и философа Блеза Паскаля.

Нет резона перечислять всех, кто занимался решением трисектрисы угла, потому, что их было очень много. Интерес к этим задачам был очень велик, поступили многочисленные материалы в адрес различных Академий наук тех времен. Парижской академией наук в 1775году. Чтобы не занимать драгоценное время ученых даже было принято решение о не рассмотрении вопроса по решению трех классических задач на построение,.

В 1837 году французским математиком Петром Лораном Венцелем была доказана не разрешимость этих задач циркулем и линейкой, с того времени интерес к этим задачам намного спал, это известие поставило многих математиков в неловкое положение.

Стремление к неизданному присущее человеку, является локомотивом в развитии, оно никогда не погаснет пока существуют человеческие проблемы.

Приведем некоторые способы решения трисектрисы углы:



Наиболее распространенным способом решения был способ «вставки».

Рис.1

Возьмем на стороне угла AOB произвольную точку A и опустим из нее перпендикуляр AB на другую сторону (рис.1) Из точки A проведем луч AF сонаправленный к лучу OB. Вставим теперь между перпендикулярными лучами AB и AF отрезок DF длиной 2OA так, чтобы его продолжение проходило через точку O.

Тогда $\angle$ FOB=1/3$\angle$ AOB

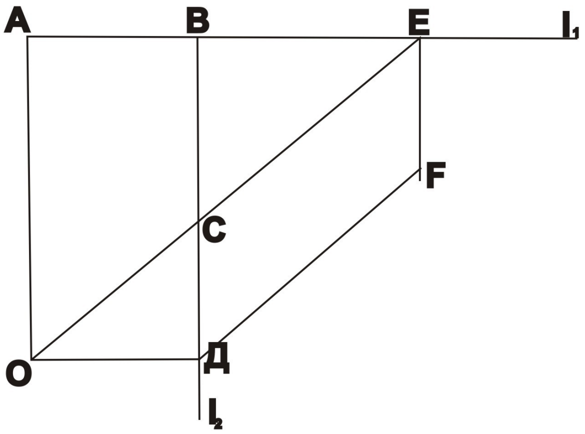
На самом деле пусть точка E середина отрезка DF, тогда точка A лежит на окружности с диаметром DF и с центром E.

Δ AEF и Δ OAE равнобедренные, поэтому

$\angle$ AOD =$\angle$ AED=$\angle$ EAF+$\angle$ AFE=2$\angle$ AFE,

значить $\angle$ FOB=1/3$\angle$ AOB

Древнегреческий математик Папп Александрийский показал, что задача вставления отрезка между данными перпендикулярами сводится к построению точки пересечения окружности и гиперболы. Для этого рассмотрим прямоугольник OABD.



Пусть продолжением стороны AB будет I_1, продолжением стороны BD будет I_2 (рис.2).

Рис. 2

Пусть отрезок имеющий данную длину CE пересекает эти перпендикуляры в точке C и E, а также продолжение отрезка EC проходит через данную точку O.

Польстим Δ DCE на параллелограмм DCEF, тогда для того, чтобы построить искомую отрезка CE надо будет точку F .

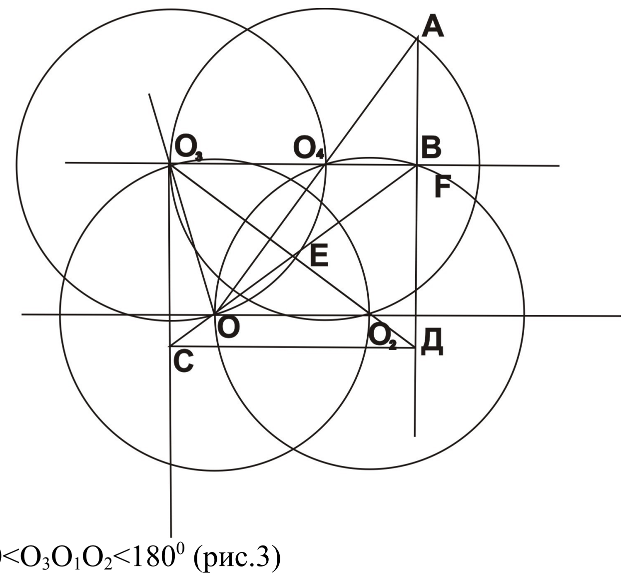
Если построим точку F , тогда легко построить отрезок CE, проведя параллельную линию на DF, проходящую через точку O.

Так как Δ OAE~Δ OCD, следовательно OA/CD=AE/OD отсюда OA$\bullet$ OD=CD$\bullet$ AE, OA $\bullet$ OD=AE$\bullet$ EF, т.е. AE$\bullet$ EF=S_{OABD}, а это значить, что точка F лежит на гиперболе. Если направить оси ox и oy по лучам AE и AO, то эта гипербола задается уравнением xy = $S_{OABD.}$ Точка F удалена от точки D на данное расстояние, поэтому точка F также лежит на окружности.

Как мы видим, суть задачи построения трисектрисы угла в данном случае сводится к построению точки E.

Ставим задачу, можно ли построить точку E не построив точку F?

Для этого выполним следующие построения.



Пусть даны $0<O_3O_1O_2<180^0$ (рис.3)

1. С радиусом $R=O_1O_3$ с центрами $O_1O_2O_3O_4$ построим четыре окружности, как показано на (рис.3), тогда $O_3O_4 \parallel O_1O_2$.
2. От точки O_3 опустим перпендикуляр O_3F на отрезок O_1O_2.
3. Проведем биссектрису O_1O_4 угла $O_3O_1O_2$ и эта биссектриса пересекается с окружностью с центром O_4 и радиусом R в точке A (на самом деле пересекает в двух точках, но нас интересует только точка A)
4. Опустим от точки A перпендикуляр на продолжение отрезка O_3O_4 пусть этот перпендикуляр пересекается с продолжением O_3O_4 в точке B т.е. $AB \perp O_3B$

Тогда луч O_1B является трисектрисой угла $O_3O_1O_2$.

Теперь докажем, что действительно O_1B является трисектрисой угла $O_3O_1O_2$.

Пересечение перпендикуляра O_3F с лучом O_1B обозначим буквой C, продолжим AB до пересечения с продолжением O_1O_2. От точки C проведем параллельную линию на O_1O_2 и пересечение ее с продолжением AB обозначим буквой D.

Тогда получим прямоугольник CO_3BD. O_3D и CB являются диагоналями этого прямоугольника, так как диагонали прямоугольника равны и в точки пересечения делятся на два разных отрезка Δ O_3EB будет равнобедренным, так как $O_1O_3=O_3E=R$, Δ O_1O_3E тоже равнобедренный.

Отсюда $\angle O_3BE=\angle EO_3B$ и $\angle O_1EO_3=\angle O_3O_1E$.

$\angle O_3O_1E=2\angle O_3BE$ и $\angle BO_1O_2=1/3\angle O_3O_1O_2$

Таким образом мы доказано, что O_1B является трисектрисой угла $O_3O_1O_2$.

С другой стороны, если вставить отрезок равный по длине диаметра окружности (O_1R) между перпендикулярами O_3F и O_3B так, чтобы продолжение перпендикуляра проходило через точку O_1 мы найдем и все это построено с помощью циркуля и линейки.

Таким образом, думаю, мне удалость решить задачу, которую 2500 лет считали, как не разрешимую с помощью циркуля и линейки.

В случае тупого угла это построение тоже верно.

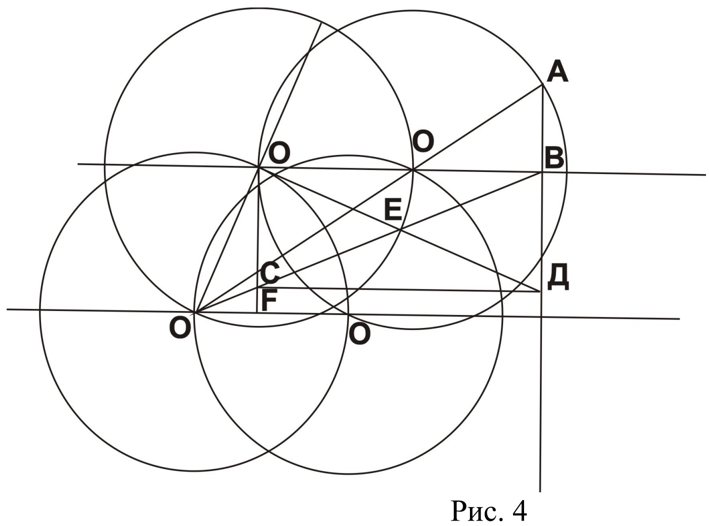


Рис. 4