К.С. Алыбаев, М.Р. Нарбаев

Явление простирающегося симметричного пограничного слоя для сингулярно возмущенных уравнений при потере устойчивости

1. Постановка задачи.

Пусть рассматривается задача

$$\varepsilon x(t,\varepsilon) = A(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon a(t), \quad (1)$$

$$x(-1,\varepsilon) = x^0, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр; $x(t,\varepsilon) = colon(x_1, x_2)$; $a(t) = colon(a_1, a_2)$; $A(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$; x^0 - $const$.

U. Пусть $a(t) \in Q(H)$, где $H \subset C$ (C– комплексная плоскость) открытый круг с центром в точке $(0;0)$ и радиуса $\rho > 1$; $Q(H)$ – пространство аналитических функций в H.

Матрица $A(t)$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2}(t) = t \pm i$. Для действительных t: $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t) < 0$ при $t < 0$; $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(0) = 0$; $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}(t) > 0$ при $t > 0$.

Вырожденная система, соответствующая (1), имеет решение $x_0(t) \equiv 0$.

Для задачи (1)-(2) не выполняется условие устойчивости, сформулированное в [4]. Исследованию таких задач посвящены работы [2,3,5,6]. Характерной чертой этих работ является то, что поставленная задача рассматривается в предположении $\|x^0\| = 0(\varepsilon)$, т.е. для достаточно малых начальных условий и исследуется только асимптотическое поведение решения при $\varepsilon \to 0$. Задача вида (1)-(2) не исследованы на пограничный слой и одним из причин является начальное условие $\|x^0\| = 0(\varepsilon)$. При $\varepsilon \to 0$, $\|x^0\| \to 0$ и заранее можно предполагать, что пограничный слой не существует.

Наша основная цель исследовать задачу (1)-(2) на пограничный слой. В такой постановке задача (1)-(2) исследуется впервые.

2. Предварительные преобразования и построения.

В системе (1) произведем замену

$$x(t,\varepsilon) = T \cdot \xi(t,\varepsilon),$$

где $\xi(t,\varepsilon) = colon(\xi_1, \xi_2)$ – новая неизвестная функция; $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$.

Получим

$$\varepsilon \dot{\xi}(t,\varepsilon) = \Lambda(t)\xi(t,\varepsilon) + в(t), \quad (3)$$

$$\xi(-1,\varepsilon) = \xi^0, \quad (4)$$

где $\Lambda(t) = diag[t+i, t-i]$; $в(t) = colon(в_1, в_2)$; $\xi^0 = T^{-1} \cdot x^0$; $T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$; $\xi^0 = colon(\xi_1^0, \xi_2^0)$ - $const$. В силу U $в(t) \in Q(H)$.

Решение задачи (3)-(4) можно представить в виде следующих функций

$$\xi_1(t,\varepsilon) = \xi_1^0 E_1(t,-1,\varepsilon) + \int_{-1}^{t} E_1(t,\tau,\varepsilon)\hat{a}_1(\tau)d\tau, \quad (5)$$

$$\xi_2(t,\varepsilon) = \xi_2^0 E_2(t,-1,\varepsilon) + \int_{-1}^{t} E_2(t,\tau,\varepsilon)\hat{a}_2(\tau)d\tau, \quad (6)$$

где $E_1(t,\tau,\varepsilon) = exp\frac{1}{2\varepsilon}\left((t+i)^2 - (\tau+i)^2\right)$, $E_2(t,\tau,\varepsilon) = exp\frac{1}{2\varepsilon}\left((t-i)^2 - (\tau-i)^2\right)$.

Уточним область $(K) \subset H$, где будут рассмотрены функции (5), (6). Полагая $t = t_1 + it_2$, t_1, t_2 - действительные переменные, рассмотрим функции

$$A_1(t_1,t_2) = t_1^2 - (t_2+1)^2,\ A_2(t_1,t_2) = t_1^2 - (t_2-1)^2.$$

Следуя [1], область (K) выберем так, чтобы линии уровня $A_1(t_1,t_2) = C - const$, $A_2(t_1,t_2) = C - const$ соединяли точки полуотрезков $[-1,0)$ и $(0,1]$ действительной оси.

Непосредственные вычисления показывают, что областью (K) является квадрат с вершинами в точках $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$, $(0;-1)$.

Пусть $\{C_0\}$ означает линию уровня $A_1(t_1,t_2) = 0$ и $\{C_0\} \subset (K)$; $\{C_\varepsilon\} = \{A_1(t_1,t_2) = -\varepsilon,\ (t_1;t_2) \in (K)\}$, $\{C_1\} = \{A_1(t_1,t_2) = -\varepsilon^\delta,\ 0 < \delta < 1,\ (t_1;t_2) \in (K)\}$.

Введем следующие обозначения:

(Π) – часть (K), ограниченного линиями уровня $\{C_0\}$ и $\{C_1\}$, причем $\{C_1\}$ не принадлежит (Π);

$(\overline{\Pi})$ – область симметричная с (Π) относительно действительной оси. В дальнейшем симметрию будем понимать только так, если не оговорено противное;

$(K) \supset (K_1)$ - область, ограниченная линией уровня $\{C_1\}$ и отрезками прямых $t_1 + t_2 + 1 = q$, $-t_1 + t_2 + 1 = q$ $(0 < q < 1,\ (1-q)$ - не зависит от ε);

$(\overline{K}_1)$ - симметрично к (K_1);

(K_0) - означает оставшуюся часть (K) или $(K_0) = (K) \setminus \left[(\Pi) \cup (\overline{\Pi}) \cup (K_1) \cup (\overline{K}_1)\right]$.

3. Вспомогательные леммы.

Л е м м а 1. Пусть $\widetilde{A}(\widetilde{t}_1;\widetilde{t}_2) \in \{C_0\}$ и $A(\tau_1;\tau_2) \in (K)$. Тогда $A_1(t_1,t_2)$ убывает по прямым $t_1 + t_2 + 1 = a$, $-t_1 + t_2 + 1 = b$ $(a > 0,\ b > 0)$, если точка $(t_1;t_2)$ движется от $\widetilde{A}$ к A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $A_1(t_1,t_2) = t_1^2 - (t_2+1)^2$. Возьмем прямую $-t_1 + t_2 + 1 = b$. Находим $t_2 + 1 = t_1 + b$. Подставляя найденное значение в $A_1(t_1,t_2)$ получим

$$A_1(t_1, t_1 + b - 1) = t_1^2 - (t_1 + b)^2 = -2t_1 b + b^2$$

или $A_1' = -2b < 0$. Аналогично доказывается убываемость по прямой $t_1 + t_2 + 1 = a$.

Л е м м а 2. Пусть: 1. $(t_1;t_2) \in \{C_0\}$; 2. $F(t) \in Q(H)$; 3. $E_1(t,\tau,\varepsilon) = exp\dfrac{1}{2\varepsilon}\left((t+i)^2 - (\tau+i)^2\right)$. Тогда

$$|I(t,\varepsilon)| = \left|\int_{-1}^{t} E_1(t,\tau,\varepsilon)F(\tau)d\tau\right| \le C \cdot \varepsilon^{\frac{\delta}{2}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим следующие случаи

1. $-1 \le t_1 \le -\dfrac{1}{2}q$; 2. $-\dfrac{1}{2}q \le t_1 \le -\dfrac{1}{2}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}$; 3. $-\dfrac{1}{2}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}} \le t_1 \le 0$;

4. $0 \le t_1 \le \dfrac{1}{2}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}$; 5. $\dfrac{1}{2}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}} \le t_1 \le \dfrac{1}{2}q$; 6. $\dfrac{1}{2}q \le t_1 \le 1$.

Пусть $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, τ_1, τ_2 - действительные переменные и $F(\tau) = F_1(\tau_1,\tau_2) + iF_2(\tau_1,\tau_2)$. Поскольку $E_1(t,\tau,\varepsilon), F(\tau) \in Q(H)$, то путь интегрирования можно выбрать произвольным, но принадлежащим H. Будем считать, что путь идет по линии уровня $\{C_0\}$. Уравнение $\{C_0\}$ будет $t_1 + t_2 + 1 = 0$ или $-t_1 + t_2 + 1 = 0$. Прямая $t_1 + t_2 + 1 = 0$ проходит через точки $(-1;0)$ и $(0;-1)$, а прямая $-t_1 + t_2 + 1 = 0$ через $(0;-1)$ и $(1;0)$.

Таким образом, в первом случае путь идет от $(-1;0)$ до $(t_1;t_2)$ по прямой $t_1 + t_2 + 1 = 0$, а во втором случае от $(0;-1)$ до $(t_1;t_2)$ по прямой $-t_1 + t_2 + 1 = 0$.

Рассмотрим первый случай. Второй случай исследуется аналогично. Возьмем $t_1 + t_2 + 1 = 0$, отсюда $t_2 = -t_1 - 1$. Имеем

$$I(t,\varepsilon) = \int_{-1}^{t} E_1(t,\tau,\varepsilon)F(\tau)d\tau = \int_{p(-1,t)} e^{\frac{it_1(t_2+1) - i\tau_1(\tau_2+1)}{\varepsilon}}(F_1 + iF_2)d\tau = \int_{-1}^{t_1} e^{\frac{-it_1^2 + i\tau_1^2}{\varepsilon}}(F_1 + iF_2)d(\tau_1 + i(-1-\tau_1)) =$$

$$= e^{-\frac{it_1^2}{\varepsilon}} \int_{-1}^{t_1}\left(\cos\frac{\tau_1^2}{\varepsilon} + i\sin\frac{\tau_1^2}{\varepsilon}\right)(F_1 + iF_2)(1-i)d\tau_1 = e^{-\frac{it_1^2}{\varepsilon}}\int_{-1}^{t_1}\left[(F_1+F_2)\cos\frac{\tau_1^2}{\varepsilon} + (F_1 - F_2)\sin\frac{\tau_1^2}{\varepsilon}\right]d\tau_1 +$$

$$+ ie^{-\frac{it_1^2}{\varepsilon}}\int_{-1}^{t_1}\left[(F_1+F_2)\sin\frac{\tau_1^2}{\varepsilon} - (F_1 - F_2)\cos\frac{\tau_1^2}{\varepsilon}\right]d\tau_1 .$$

Отсюда следует, что для оценки $I(t,\varepsilon)$ достаточно оценить интегралы видов

$$I_1(t,\varepsilon) = \int_{-1}^{t_1} f(\tau_1)\sin\frac{\tau_1^2}{\varepsilon}d\tau_1 \text{ и } I_2(t,\varepsilon) = \int_{-1}^{t_1} f(\tau_1)\cos\frac{\tau_1^2}{\varepsilon}d\tau_1 .$$

Оценим $I_2(t,\varepsilon)$. Имеем

$$\left|I_2(t,\varepsilon)\right| = \left|\int_{-1}^{t_1} f(\tau_1)\cos\frac{\tau_1^2}{\varepsilon}d\tau_1\right|.$$

Произведем растяжение промежутка:

$$\frac{\tau_1^2}{\varepsilon} = h,\ \tau_1 = -\sqrt{\varepsilon h},\ d\tau_1 = -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{h}}dh;\ \tau_1 = -1,\ h = \frac{1}{\varepsilon};\ \tau_1 = t_1,\ h = \frac{t_1^2}{\varepsilon}.$$

Следовательно

$$\left|I_2(t,\varepsilon)\right| = \left|\int_{1/\varepsilon}^{t_1^2/\varepsilon} f(-\sqrt{\varepsilon h})\cos h\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{h}}dh\right|.$$

Произведя интегрирования по частям, получим

$$\left|I_2(t,\varepsilon)\right| \le C\sqrt{\varepsilon}\left|f(-\sqrt{\varepsilon h})\cdot\frac{1}{\sqrt{h}}\cdot\sin h\Big|_{1/\varepsilon}^{t_1^2/\varepsilon}\right| + C\sqrt{\varepsilon}\left|\int_{1/\varepsilon}^{t_1^2/\varepsilon}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{h}}dh\right| + C\sqrt{\varepsilon}\left|\int_{1/\varepsilon}^{t_1^2/\varepsilon}\frac{dh}{\sqrt{h^3}}\right| \le$$

$$\le C\cdot\frac{\varepsilon}{|t_1|} + C\varepsilon + C\varepsilon\left|\ln t_1^2\right| + C\cdot\frac{\varepsilon}{|t_1|} + C\varepsilon \le C\varepsilon + C\cdot\frac{\varepsilon}{|t_1|} + C\varepsilon\left|\ln t_1^2\right| = C\varepsilon\left(1 + \frac{1}{|t_1|} + \left|\ln t_1^2\right|\right).$$

В дальнейшем все постоянные не играющие существенную роль будем обозначать одной и той же буквой C.

Для $I_1(t,\varepsilon)$ имеет место аналогичная оценка. В целом для $I(t,\varepsilon)$ имеем такую же оценку.

1. Если $-1 \le t_1 \le -\frac{1}{2}q$, то $\left|I(t,\varepsilon)\right| \le C\varepsilon$;

2. Если $-\frac{1}{2}q \le t_1 \le -\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}$, то $\left|I(t,\varepsilon)\right| \le C\varepsilon^{1-\frac{\delta}{2}}$.

3. Пусть $-\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}} \le t_1 \le 0$. Для этого случая рассматриваемый интеграл разделим на два

$$I(t,\varepsilon) = \int_{p_1(-1,-\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}})} E_1(t,\tau,\varepsilon)F(\tau)d\tau + \int_{p_2(-\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}},t_1)} E_1(t,\tau,\varepsilon)F(\tau)d\tau .$$

Первый интеграл имеет порядок $\varepsilon^{1-\frac{\delta}{2}}$, а во втором интеграле сразу переходя к модулю, получим, что он имеет порядок $\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}$. Так как $0 < \delta < 1$, то окончательно имеем $|I(t,\varepsilon)| \le C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}$.

4. Случай $0 \le t_1 \le \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}$ исследуется аналогично и $|I(t,\varepsilon)| \le C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}$.

5. Пусть $\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}} \le t_1 \le \frac{1}{2}q$. Проведя вычисления, как и в предыдущих случаях получим $|I(t,\varepsilon)| \le C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}$.

6. Если $\frac{1}{2}q \le t_1 \le 1$, то $|I(t,\varepsilon)| \le C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}$.

Для случаев 4-6 надо учесть, что путь идет по прямой $-t_1 + t_2 + 1 = 0$.

Для дальнейших вычислений точность оценок не играет роли. Объединив полученные оценки, убеждаемся в справедливости леммы. Лемма доказана.

4. Основная теорема.

Т е о р е м а. Пусть выполнено U. Тогда для решения задачи (1)-(2) справедлива оценка

$$C_1\omega_1(t,\varepsilon) \le \|x(t,\varepsilon)\| \le C_2\omega_2(t,\varepsilon), \qquad (7)$$

где

$$\omega_1(t,\varepsilon) = \begin{cases} \|x^0\| - C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}},\ t \in (\Pi) \cup (\overline{\Pi}); \\ 0,\ t \in (K_1) \cup (\overline{K}_1) \cup (K_0), \end{cases} \quad \omega_2(t,\varepsilon) = \begin{cases} \|x^0\| + C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}},\ t \in (\Pi) \cup (\overline{\Pi}); \\ \varepsilon^{1-\frac{\delta}{2}},\ t \in (K_1) \cup (\overline{K}_1); \\ \varepsilon,\ t \in (K_0). \end{cases}$$

$0 < C_1 < C_2$, и C_1, C_2 – некоторые постоянные не зависящие от ε

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно оценить функции (5) и (6) в (K). Функции $A_1(t_1,t_2)$ и $A_2(t_1,t_2)$ в симметричных точках принимают равные значения. Тогда выбирая пути интегрирования симметричными для $\xi_1(t,\varepsilon)$ и $\xi_2(t,\varepsilon)$ в симметричных областях имеем одинаковые оценки.

Оценим $\xi_1(t,\varepsilon)$. Для этого определим пути интегрирования. Заметим, что рассматриваемые области (только сами) симметричны относительно мнимой оси. Таким образом, каждую область можно разделить мнимой осью на левые и правые стороны.

Линия уровня $\{C_1\}$ мнимую ось пересекает в точке $\left(0;-1+\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}\right)$. Из этой точки проведем прямые параллельные к прямым $t_1 + t_2 + 1 = 0$ и $-t_1 + t_2 + 1 = 0$. Область ограниченную отрезками этих прямых и линией уровня $\{C_0\}$ обозначим (Π_0).

1. Для левых частей областей $\{(\Pi)\setminus(\Pi_0)\}$, (K_1), (K_0), $(\overline{K}_1)$, $(\overline{\Pi})$ путь интегрирования идет от точки $(-1;0)$ до $(\tilde{t}_1;\tilde{t}_2) \in \{C_0\}$ по линии уровня $\{C_0\}$, затем от $(\tilde{t}_1;\tilde{t}_2)$ до $(t_1;t_2)$ по прямой $-t_1 + t_2 + 1 = b$.

2. Для (Π_0) путь идет от $(-1;0)$ до $\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}};-1+\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}\right)$; от $\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}};-1+\frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}\right)$ до $(t_1;\tilde{t}_2) \in \{C_0\}$ по линии уровня $\{C_0\}$, затем от $(t_1;\tilde{t}_2)$ до $(t_1;t_2)$ по прямой $\tau_1 = t_1$.

3. Для правых частей областей $\{(\Pi)\setminus(\Pi_0)\}$, (K_1), (K_0), $(\overline{K}_1)$, $(\overline{\Pi})$ путь идет от $(-1;0)$ до $(\tilde{t}_1;\tilde{t}_2)\in\{C_0\}$ по линии уровня $\{C_0\}$, затем от $(\tilde{t}_1;\tilde{t}_2)$ до $(t_1;t_2)$ по прямой $t_1+t_2+1=a$.

Переходим к оценке $\xi_1(t,\varepsilon)$.

1. Пусть $(t_1;t_2)$ принадлежит левым частям $\{(\Pi)\setminus(\Pi_0)\}$, (K_1), (K_0), $(\overline{K}_1)$, $(\overline{\Pi})$.

$$\left|\xi_1(t,\varepsilon)\right|\le\left|\xi_1^0\right|e^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}}+e^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}}\left|\int_{-1}^{\tilde{t}_1}e^{\frac{i\tau_1^2}{2\varepsilon}}(в_{11}+iв_{12})d(\tau_1-i(1+\tau_1))\right|+$$

$$+e^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}}\left|\int_{\tilde{t}_1}^{t_1}e^{\frac{2a\tau_1+a^2}{2\varepsilon}}\left|в_{11}+в_{12}\right|\left|1+i\right|d\tau_1\right|.$$

Для оценки первого интеграла воспользуемся Леммой 2, а для второго интеграла Леммой 1. Имеем

$$\left|\xi_1(t,\varepsilon)\right|\le\left|\xi_1^0\right|e^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}}+Ce^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}+C\cdot\frac{\varepsilon}{b}\cdot \tag{8}$$

Аналогично

$$\left|\xi_1(t,\varepsilon)\right|\ge\left|\xi_1^0\right|e^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}}-\tilde{N}e^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}}\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}-\tilde{N}\cdot\frac{\varepsilon}{b}\,. \tag{9}$$

Оценки (8) и (9) рассмотрим в зависимости от принадлежности $(t_1;t_2)$ к перечисленным областям.

1.1. $(t_1;t_2)\in\{(\Pi)\setminus(\Pi_0)\}$. Учтем, что $\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}\le b\le 2\cdot$ Далее выражение $e^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}}$ в зависимости от точки $(t_1;t_2)$ имеет различный порядок малости. Если $(t_1;t_2)\in\{C_\varepsilon\}$, то $e^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}}=e^{-\frac{1}{2}}$. Затем при движении $(t_1;t_2)$ до линии уровня $\{C_1\}$ плавно убывая, достигает порядка ε^n, $n\in\mathbb{N}$.

Учитывая это замечание из (8) и (9) имеем

$$C_1\left|\xi_1^0\right|-C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}\le\left|\xi_1(t,\varepsilon)\right|\le C_2\left|\xi_1^0\right|+C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}, \tag{10}$$

$C\varepsilon^n<C_1\le e^{-\frac{1}{2}}$, $e^{-\frac{1}{2}}<C_2\le 1\cdot$

1.2. $(t_1;t_2)\in$ (левая)$(K_0)\cup(\overline{K}_1)\cup(\overline{\Pi})$. Для этого случая $q\le b\le 2$, $e^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}}=o(\varepsilon^n)\cdot$ Следовательно

$$0\le\left|\xi_1(t,\varepsilon)\right|\le C\varepsilon\,. \tag{11}$$

1.3. $(t_1;t_2)\in$ (левая)(K_1), то

$$0\le\left|\xi_1(t,\varepsilon)\right|\le C\varepsilon^{1-\frac{\delta}{2}}.$$

2. $(t_1;t_2)\in(\Pi_0)$.

$$\left|\xi_1(t,\varepsilon)\right|\le\left|\xi_1^0\right|e^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}}+e^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}}\left|\int_{-1}^{-\frac{1}{2}\varepsilon^{\delta/2}}e^{\frac{i\tau_1^2}{2\varepsilon}}(в_{11}+iв_{12})(1-i)d\tau_1\right|+C\left|\int_{-\frac{1}{2}\varepsilon^{\delta/2}}^{t_1}e^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}}d\tau_1\right|+$$

$$+Ce^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}}\left|\int_{\tilde{t}_2}^{t_2}e^{-\frac{t_1^2-(\tau_2+1)^2}{2\varepsilon}}d\tau_2\right|\le\left|\xi_1^0\right|e^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}}+C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}e^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}}+C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}+C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}\le$$

$$\leq \left|\xi_1^0\right| e^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}} + C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}. \tag{12}$$

Аналогично

$$\left|\xi_1(t,\varepsilon)\right| \geq \left|\xi_1^0\right| e^{\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{2\varepsilon}} - C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}. \tag{13}$$

3. Пусть $(t_1;t_2)\in$ (правая)$\{(\Pi)\setminus(\Pi_0)\}\cup(K_1)\cup(K_0)\cup(\overline{K}_1)\cup(\overline{\Pi})$. Для этого случая заметим, что, во-первых, рассматриваемые области симметричны к левым частям, а также симметричны пути интегрирования, следовательно, имеют места аналогичные оценки т.е.

3.1. $(t_1;t_2)\in$ (правая)$\{(\Pi)\setminus(\Pi_0)\}$, то

$$C_1\left|\xi_1^0\right| - C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}} \leq \left|\xi_1(t,\varepsilon)\right| \leq C_2\left|\xi_1^0\right| + C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}}, \tag{14}$$

3.2 $(t_1;t_2)\in$ (правая)$(K_0)\cup(\overline{K}_1)\cup(\overline{\Pi})$, то

$$0 \leq \left|\xi_1(t,\varepsilon)\right| \leq C\varepsilon. \tag{15}$$

3.3 $(t_1;t_2)\in$ (правая)(K_1), то

$$0 \leq \left|\xi_1(t,\varepsilon)\right| \leq C\varepsilon^{1-\frac{\delta}{2}}. \tag{16}$$

Объединив оценки (10)-(16) можем написать

$$\begin{cases} C_1\left|\xi_1^0\right| - C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}} \leq \left|\xi_1(t,\varepsilon)\right| \leq C_2\left|\xi_1^0\right| + C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}},\ (t_1;t_2)\in(\Pi); \\ 0 \leq \left|\xi_1(t,\varepsilon)\right| \leq C\varepsilon^{1-\frac{\delta}{2}},\ (t_1;t_2)\in(K_1); \\ 0 \leq \left|\xi_1(t,\varepsilon)\right| \leq C\varepsilon,\ (t_1;t_2)\in(K_0)\cup(\overline{K}_1)\cup(\overline{\Pi}). \end{cases} \tag{17}$$

Аналогичную оценку можно получить и для $\xi_2(t,\varepsilon)$, т.е.

$$\begin{cases} C_1\left|\xi_2^0\right| - C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}} \leq \left|\xi_2(t,\varepsilon)\right| \leq C_2\left|\xi_2^0\right| + C\varepsilon^{\frac{\delta}{2}},\ (t_1;t_2)\in(\overline{\Pi}); \\ 0 \leq \left|\xi_2(t,\varepsilon)\right| \leq C\varepsilon^{1-\frac{\delta}{2}},\ (t_1;t_2)\in(\overline{K}_1); \\ 0 \leq \left|\xi_2(t,\varepsilon)\right| \leq C\varepsilon,\ (t_1;t_2)\in(K_0)\cup(K_1)\cup(\Pi). \end{cases} \tag{18}$$

Объединив оценки (17), (18) и учитывая, что $\|x\| = \|T\|\|\xi\|$ убеждаемся в справедливости теоремы.

Из доказанной теоремы следует, что для решения задачи (1)-(2) пограничный слой существует. Пограничный слой простирается вдоль линий уровня $\{C_0\}$, $\{\overline{C}_0\}$ и симметрична. В этом и заключается обнаруженное новое явление.

Благодарим П.С.Панкова за полезное обсуждение.

Использованные источники

1. Алыбаев К.С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. // Вестник КГНУ. -Серия 3, Выпуск 6. –Бишкек, 2001г. -С. 190-200.

2. Анарбаева Г.М. Асимптотическое поведение решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости положение равновесия. Дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. -Бишкек, 1993. -120с.

3. Каримов С.К. Асимптотика решений некоторых дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в

плоскости «быстрых движений». Дисс. … доктора физ.-мат. наук: 01.01.02. -Ош, 1983. -260с.

4. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений содержащих малые параметры при производных //Мат. сб. -1952. -Т.31(73), №3. –С.575-586.
5. Турсунов Д.А. Асимптотика решений сингулярно возмущенных нелинейных уравнений, в случае смены устойчивости, когда собственные значения имеют кратный полюс. // Изд. «Эверо», «Актуальные проблемы дифферен. урав. и мат. физики». Алма-Ата, 2005. –С.200.
6. Шишкова М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. // Докл. АН СССР.-1973.-Т.209, №3.-С.576-579.