

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПРОДОЛЬНОЙ ПРОКАТКИ ЛИСТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВЕРХПЛАСТИЧНОСТИ

Тилкени жукартуунун технологиялык маселесинин аналитикалык чыгарылышы изотермалдык шартта, анын ичинде эн жогорку ийкемдуулук температураларынын диапазонунда каралат. Чечуучу функциядан коз каранды болгон которулуш жана деформация ылдамдыктарынын талаасы аныкталынат.

Рассматривается аналитическое решение технологической задачи прессования листа в изотермических условиях, в частности в диапазоне температур сверхпластичности. В зависимости от разрешающей функции определены поля скоростей перемещений и деформаций.

The analytical decision of a technological problem of rolling of the plate in isothermal conditions, in particular in a range of temperatures of the superplasticity is considered. The obvious kind of resolving function is certain. The field of rate of strain and displacement depending on resolving function are certain.

1. Постановка задачи. Прокаткой называется технологический процесс, в котором уменьшается толщина (высота) листа и увеличивается длина при пропуске металла через вращающиеся валки.

Для характеристики деформации при прокатке введем следующие обозначения: h_0 - высота листа до прокатки, b_0 - ширина листа до прокатки, l_0 - длина листа до прокатки, h_1 , b_1 и l_1 - соответственно высота, ширина и длина листа после прокатки.

Отношение $\frac{h_1}{h_0} = \gamma$ называется коэффициентом обжатия.

При прохождении металла между валками прокатного стана высота его сечения будет уменьшаться с h_0 до h_1 (рис. 1). Разность между величиной первоначальной высоты полосы (до пропуска) и высоты полосы после пропуска называется линейным, или абсолютным обжатием.

Рассматривается задача определения кинематических параметров изотермической прокатки листа с использованием сверхпластичности.

Принято, что радиусы валков одинаковы и вращаются с одинаковыми угловыми скоростями. Считается, что процесс осуществляется симметрично относительно срединной плоскости полосы. Как следствие, полоса толщиной h_0 на входе в валки становится полосой толщиной h_k (рис. 1) на выходе из валков. Часть полосы между входом и выходом из валков образует очаг пластической деформации. Остальная часть полосы принимается жесткой.

Далее полагаем, что ширина полосы превышает длину очага деформации более чем в пять раз. Тогда, следуя [1], можно принять, что реализуется плоская деформация. Из условия несжимаемости при этом следует закон изменения средних скоростей перемещений \mathcal{Q} в направлении оси прокатки в форме $\mathcal{Q}_0 h_0 = \mathcal{Q}_k h_k = \mathcal{Q} h$, где $\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_k$ - средние скорости на входе в валки и на выходе из них, h - толщина полосы в текущем сечении. Из этого условия можно заключить, что по мере продвижения в валках средняя скорость \mathcal{Q} увеличивается. В окрестности входа в валки среднюю скорость меньше окружной, а на выходе - обычно больше. Поэтому на начальном участке от входа полосы в валки направление силы трения, действующей на полосу, совпадают с направлением движения полосы (зона отставания), а на участке, примыкающем к выходу, противоположны движению (зона опережения).

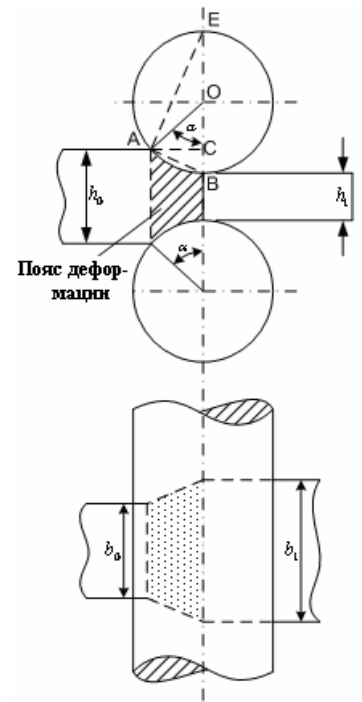


Рис.1. Схема очага деформации

Решение задачи основано на идеях /2/ о течении металла в клиновидном сходящемся канале. При математической формулировке задачи принято, что указанное течение является двумерным. Прокатка осуществляется при температурах, соответствующих термическому диапазону сверхпластичности /3/. Считаем, что течение металла является радиальным, уширение отсутствует.

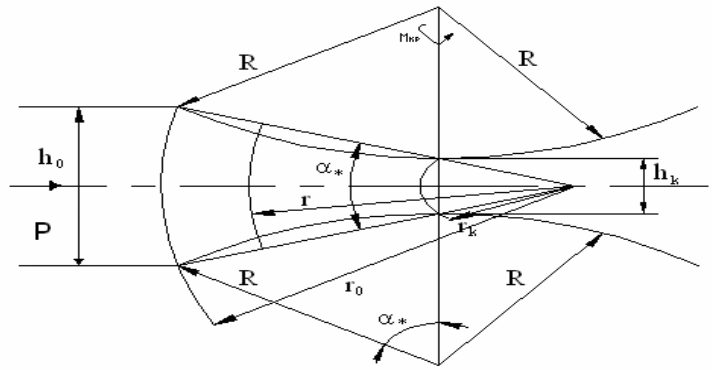


Рис. 2. Схема процесса прокатки листа

Далее полагаем угол захвата малым. Это позволяет заменить дугу контакта линией (рис. 2).

Примем цилиндрическую систему координат (r, α, z) , причем начало координат разместим в вершине клина. Геометрические параметры процесса приведены на рис.2.

Математическая формулировка задачи включает следующую систему уравнений:

- уравнение равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\tau}_{r\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\alpha}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \bar{\tau}_{r\alpha}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\sigma}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{2\bar{\tau}_{r\alpha}}{r} &= 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$

- геометрические соотношения

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{\partial \bar{g}_r}{\partial r}; \quad \bar{\varepsilon}_\alpha = \frac{\bar{g}_r}{r}; \quad \bar{\gamma}_{r\alpha} = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{g}_r}{\partial \alpha}; \quad (1.2)$$

- условие несжимаемости

$$\bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_\alpha = 0; \quad (1.3)$$

- определяющие соотношения в форме уравнений теории упругопластических процессов малой кривизны

$$\bar{\sigma}_r - \sigma_0 = \frac{2\bar{\sigma}_u}{3\bar{\varepsilon}_u} \bar{\varepsilon}_r; \quad \bar{\sigma}_\alpha - \sigma_0 = \frac{2\bar{\sigma}_u}{3\bar{\varepsilon}_u} \bar{\varepsilon}_\alpha; \quad \bar{\tau}_{r\alpha} = \frac{\bar{\sigma}_u}{3\bar{\varepsilon}_u} \bar{\gamma}_{r\alpha}. \quad (1.4)$$

Здесь $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\alpha, \bar{\tau}_{r\alpha}$ – компоненты тензора напряжений; $\bar{\dot{\epsilon}}_r, \bar{\dot{\epsilon}}_\alpha, \bar{\dot{\gamma}}_{r\alpha}$ – составляющие тензора деформаций; $\bar{\mathcal{G}}_r$ – скорость радиального перемещения; $\bar{\sigma}_u, \bar{\dot{\epsilon}}_u$ – соответственно интенсивность напряжений и скоростей деформаций, связь между которыми принята в виде

$$\bar{\sigma}_u = \sigma^* \left[1 + m_0 \left(\frac{\bar{\dot{\epsilon}}_u}{\dot{\epsilon}^*} - 1 \right)^3 + \beta(\xi) \left(\frac{\bar{\dot{\epsilon}}_u}{\dot{\epsilon}^*} - 1 \right) \right], \quad (1.5)$$

где $\sigma^*(\xi), \dot{\epsilon}^*(\xi)$ – внутренние альтернативные параметры состояния, $\beta(\xi)$ – управляющий параметр, m_0 – постоянная материала, ξ – нормированная температура.

Укажем, что в изотермических условиях функции $\sigma^* = \sigma^*(\xi), \dot{\epsilon}^* = \dot{\epsilon}^*(\xi); \beta = \beta(\xi)$ становятся константами материала.

Граничные условия будем формулировать в процессе решения.

2. Определение разрешающей функции. Зависимости (1.3) подставим в (1.2) и получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{G}}_r}{\partial r} + \frac{\bar{\mathcal{G}}_r}{r} = 0. \quad (2.1)$$

Интеграл уравнения (2.1) имеет вид

$$\bar{\mathcal{G}}_r = \frac{\bar{k}(\alpha)}{r}, \quad (2.2)$$

где $\bar{k} = \bar{k}(\alpha)$ – неизвестная функция, подлежащая определению.

Используя (2.2), для составляющих скоростей деформаций можно записать:

$$\bar{\dot{\epsilon}}_r = \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}_r}{\partial r} = -\frac{\bar{k}(\alpha)}{r^2}; \quad \bar{\dot{\epsilon}}_\alpha = \frac{\bar{\mathcal{G}}_r}{r} = \frac{\bar{k}(\alpha)}{r^2}; \quad \bar{\dot{\gamma}}_{r\alpha} = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}_r}{\partial \alpha} = \frac{\bar{k}'(\alpha)}{r^2}. \quad (2.3)$$

Введем безразмерные величины

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\bar{\sigma}_{ij}}{\sigma^*}; \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\bar{\dot{\epsilon}}_{ij}}{\dot{\epsilon}^*}; \quad k(\alpha) = \frac{\bar{k}(\alpha)}{\dot{\epsilon}^* R^2}, \quad (2.4)$$

где R – радиус валка (рис. 3.1).

В новых обозначениях система исходных уравнений переписется так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\alpha}{\rho} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{\rho\alpha}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\sigma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{2\tau_{\rho\alpha}}{\rho} &= 0; \end{aligned} \quad (2.5)$$

- геометрические соотношения

$$\dot{\varepsilon}_\rho = \frac{\partial \mathcal{G}_\rho}{\partial \rho}; \quad \dot{\varepsilon}_\alpha = \frac{\mathcal{G}_\rho}{\rho}; \quad \dot{\gamma}_{\rho\alpha} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{G}_\rho}{\partial \alpha}, \quad (2.6.)$$

$$\text{где } \bar{\mathcal{G}}_r = \frac{k(\alpha)\dot{\varepsilon}^* R^2}{r} = \frac{k(\alpha)\dot{\varepsilon}^* R^2}{\rho R} = \frac{k(\alpha)\dot{\varepsilon}^* R}{\rho} \quad \mathcal{G}_\rho \dot{\varepsilon}^* R \Rightarrow \mathcal{G}_\rho = \frac{\bar{\mathcal{G}}_r}{\dot{\varepsilon}^* R}.$$

Явное выражение для интенсивности скоростей деформаций может быть представлено в форме

$$\dot{\varepsilon}_u = \frac{1}{\rho^2} L^{1/2}(\alpha), \quad (2.7)$$

$$\text{где } L(\alpha) = \frac{1}{3} (4k^2(\alpha) + k'^2(\alpha)). \quad (2.8)$$

С учетом (2.4), (2.7), (2.8) определяющие уравнения примут вид:

$$\sigma_\rho - \sigma_0 = -\frac{2}{3} F(\alpha, \rho) k(\alpha); \quad \sigma_\alpha - \sigma_0 = \frac{2}{3} F(\alpha, \rho) k(\alpha); \quad \tau_{\rho\alpha} = \frac{1}{3} F(\alpha, \rho) k'(\alpha); \quad (2.9)$$

где обозначено

$$F(\alpha, \rho) = (1 - m_0 - \beta) L^{1/2}(\alpha) + \frac{3m_0 + \beta}{\rho^2} - \frac{3m_0}{\rho^4} L^{1/2}(\alpha) + \frac{m_0}{\rho^6} L(\alpha). \quad (2.10)$$

Таким образом, компоненты напряжений, скоростей деформаций и перемещений будут известны, если установлен явный вид функции $k = k(\alpha)$, которую назовем разрешающей.

Для отыскания функции $k(\alpha)$ подставим определяющие соотношения (2.9) в уравнения равновесия (2.5) и получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \rho} - \frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial \rho} k + \frac{1}{3\rho} \frac{\partial F}{\partial \alpha} k' + \frac{1}{3\rho} F k'' - \frac{4Fk}{3\rho} &= 0; \\ \frac{1}{3} \frac{\partial F}{\partial \rho} k' + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \alpha} + \frac{2}{3\rho} \frac{\partial F}{\partial \alpha} k + \frac{4}{3\rho} F k' &= 0. \\ 3 \frac{\partial \sigma_0}{\partial \rho} - 2 \frac{\partial F}{\partial \rho} k + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \alpha} k' + \frac{1}{\rho} F k'' - 4 \frac{Fk}{\rho} &= 0; \\ \rho \frac{\partial F}{\partial \rho} k' + 3 \frac{\partial \sigma_0}{\partial \alpha} + 2 \frac{\partial F}{\partial \alpha} k + 4Fk' &= 0. \\ 3 \frac{\partial \sigma_0}{\partial \rho} &= 2 \frac{\partial F}{\partial \rho} k - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \alpha} k' - \frac{1}{\rho} F k'' + 4 \frac{Fk}{\rho}; \\ 3 \frac{\partial \sigma_0}{\partial \alpha} &= -\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} k' - 2 \frac{\partial F}{\partial \alpha} k - 4Fk'. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Разрешаем первую зависимость (2.11) относительно $\frac{\partial \sigma_0}{\partial \rho}$, а вторую – $\frac{\partial \sigma_0}{\partial \alpha}$. Имеем:

$$\begin{cases} 3 \frac{\partial \sigma_0}{\partial \rho} = 2 \frac{\partial F}{\partial \rho} k - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \alpha} k' - \frac{1}{\rho} F k'' + \frac{4 F k}{\rho}; \\ 3 \frac{\partial \sigma_0}{\partial \alpha} = -\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} k' - 2 \frac{\partial F}{\partial \alpha} k - 4 F k'. \end{cases} \quad (2.12)$$

Первую из формул (2.12) продифференцируем по α , а вторую – по ρ . Полученные смешенные производные приравняем друг другу. В результате получаем уравнение

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \alpha} k + 2 \frac{\partial F}{\partial \rho} k' - \frac{k'}{\rho} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \alpha} k'' - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \alpha} k'' - \frac{F}{\rho} k''' + \frac{4}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \alpha} k + \frac{4}{\rho} F k' = \\ & = -\frac{\partial F}{\partial \rho} k' - \rho \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} k' - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \alpha} k + 4 \frac{\partial F}{\partial \rho} k'; \\ & 4 \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \alpha} k + 7 \frac{\partial F}{\partial \rho} k' + \rho \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} k' - \frac{k'}{\rho} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \alpha} (2k'' - 4k) - \frac{F}{\rho} (k''' - 4k') = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Используя (2.10), вычислим производные, входящие в (2.13). Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \rho} &= -\frac{2(3m_0 + \beta)}{\rho^3} + \frac{12m_0 L^{1/2}}{\rho^5} - \frac{6m_0 L}{\rho^7}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial \alpha} = \frac{6m_0}{\rho^5} L^{-1/2} L' - \frac{6m_0}{\rho^7} L'; \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha} &= \frac{1 - m_0 - \beta}{2} L^{-3/2} L' - \frac{3m_0}{2\rho^4} L^{-1/2} L' + \frac{m_0}{\rho^6} L'; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} &= \frac{3(1 - m_0 - \beta)}{4} L^{-5/2} L'^2 - \frac{1 - m_0 - \beta}{2} L^{-3/2} L'' + \frac{3m_0}{4\rho^4} L^{-3/2} L'^2 - \frac{3m_0}{2\rho^4} L^{-1/2} L'' + \frac{m_0}{\rho^6} L''; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} &= \frac{6(3m_0 + \beta)}{\rho^4} - \frac{60m_0}{\rho^6} L^{1/2} + \frac{42m_0}{\rho^8} L. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Подставляем (2.14) в (2.13), группируя по степеням ρ , получим

$$\begin{aligned} & \frac{1 - m_0 - \beta}{\rho} \left[-\frac{3}{4} L^{-5/2} L^2 k' + \frac{1}{2} L^{-3/2} L'' k' + L^{-3/2} L' (k'' - 2k) - L^{-1/2} (k''' - 4k') \right] + \\ & + \frac{3m_0 + \beta}{\rho^3} (k''' + 4k') + \frac{3m_0}{\rho^5} \left[\frac{8L^{-1/2} L' k + 8L^{1/2} k' - \frac{1}{4} L^{-3/2} L^2 k +}{2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} L^{-1/2} L'' k' + L^{-1/2} L' (k'' - 2k) + L^{1/2} (k''' - 4k') \right] + \\ & + \frac{m_0}{\rho^7} [-24L' k - L'' k' - L'(2k'' - 4k) - L(k''' - 4k')] = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Поскольку (2.15) удовлетворяется при всех ρ , то следует положить каждый из коэффициентов равным нулю. После несложных преобразований получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
2LL''k' - 3L^2k' + 4LL'k - 4L^2k''' + 16L^2k' &= 0; \\
k''' + 4k' &= 0; \\
72LL'k - 3L^2k' + 6LL''k' + 12LL'k'' + 12L^2k''' + 48L^2k' &= 0; \\
4Lk' - 20L'k - L''k' - 2L'k'' - Lk''' &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.16}$$

Анализ системы (2.16) показывает, что все уравнения тождественно удовлетворяются, если выполняется условие

$$k''' + 4k' = 0. \tag{2.17}$$

Таким образом, разрешающая функция $k = k(\alpha)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера (2.17). Решение этого уравнения имеет вид

$$k(\alpha) = -\frac{1}{2}C_1 \cos 2\alpha + \frac{1}{2}C_2 \sin 2\alpha + C_3, \tag{2.18}$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования.

Два граничных условия имеют вид

$$\tau_{\rho\alpha} \Big|_{\alpha=0} = 0; \quad S \Big|_{\alpha=\frac{\alpha^*}{2}} = -\chi \tau_{\max} \Big|_{\alpha=\frac{\alpha^*}{2}}, \tag{2.19}$$

где S – контактное усилие, χ – коэффициент пропорциональности между контактным усилием и максимальным касательным напряжением.

$$k'(0) = 0 \Rightarrow k'(\neq 0) \quad -\frac{1}{2}C_1 \sin 0 - \frac{1}{2}C_2 \cos 0 = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

С учетом последнего получаем:

$$k(\alpha) = -\frac{C_1}{2} \cos 2\alpha + C_3. \tag{2.20}$$

Из второго условия (2.19) будем иметь

$$C_3 = \frac{C_1}{2} \psi(\alpha^*, \chi), \tag{2.21}$$

где

$$\psi(\alpha^*, \chi) = \cos \alpha^* + \frac{\sqrt{1-\chi^2}}{\chi} \sin \alpha^*. \tag{2.22}$$

Теперь формула (2.20) перепишется так:

$$k(\alpha) = \frac{C_1}{2} (\psi - \cos 2\alpha). \tag{2.23}$$

Понятно, что выражение для разрешающей функции $k(\alpha)$ будет установлено после определения постоянной C_1 .

3. Скорости перемещений и деформаций. Рассмотрение геометрической стороны задачи связано с выбором очага пластической деформации. Будем считать указанный очаг ограниченными поверхностями $\rho_0 = \rho_0(\alpha)$, $\rho_k = \rho_k(\alpha)$.

Используя [2,4], получаем функции $\rho_0 = \rho_0(\alpha)$ и $\rho_k = \rho_k(\alpha)$ в виде

$$\rho_0 = \frac{C_1}{4\mathcal{G}_0} \frac{2\alpha\psi - \sin 2\alpha}{\sin \alpha}, \quad \rho_k = \frac{C_1}{4\mathcal{G}_0} \frac{2\alpha\psi - \sin 2\alpha}{\lambda \sin \alpha}, \quad (3.1)$$

где $\psi = \psi(\alpha^*, \chi)$ определяется формулой (2.22), $\lambda = h_0 / h_1$ – степень обжатия полосы, \mathcal{G}_0 – средняя скорость перемещения при входе в очаг пластической деформации.

Вычисляя секундный объем, проходящий через поверхность $\rho_0 = \rho_0(\alpha)$ на входе в очаг деформации, найдем C_1 :

$$C_1 = \frac{2\mathcal{G}_0}{\bar{\psi}}, \quad (3.2)$$

где

$$\bar{\psi} = \frac{\alpha^*}{\alpha^* \psi - \sin \alpha^*}. \quad (3.3)$$

Приведем окончательные формулы для нахождения:

■ разрешающей функции $k = k(\alpha)$

$$k(\alpha) = \frac{\mathcal{G}_0}{\bar{\psi}} (\psi - \cos 2\alpha); \quad (3.4)$$

– скорости радиального перемещения

$$\mathcal{G}_\rho = \frac{\mathcal{G}_0}{\rho \bar{\psi}} (\psi - \cos 2\alpha); \quad (3.5)$$

– скоростей деформаций

$$\dot{\varepsilon}_\rho = -\frac{\mathcal{G}_0}{\rho^2 \bar{\psi}} (\psi - \cos 2\alpha); \quad \dot{\varepsilon}_\alpha = \frac{\mathcal{G}_0}{\rho^2 \bar{\psi}} (\psi - \cos 2\alpha); \quad \dot{\gamma}_{\rho\alpha} = \frac{2\mathcal{G}_0}{\rho^2 \bar{\psi}} \sin 2\alpha. \quad (3.6)$$

Здесь $\psi = \psi(\alpha^*, \chi)$, $\bar{\psi} = \bar{\psi}(\alpha^*, \chi)$ определяются соответственно выражениями (2.22), (3.3).

В соотношениях (3.1)...(3.6) пока неизвестной остается величина средней скорости перемещения \mathcal{G}_0 на входе в очаг деформации.

Итак, рассмотрена в рамках теории упругопластических процессов малой кривизны технологическая задача изотермической продольной прокатки алюминиевого листа в температурных режимах сверхпластичности. Установлены явные выражения для скоростей перемещений и деформации.

Автор выражает благодарность проф. Я.И.Рудаеву за оказанную помощь в этой работе.

Список литературы

1. Соколовский В.В. Теория пластичности. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
2. Малинин Н.Н. Технологические задачи пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1979. – 119 с.
3. Рудаев Я.И. Введение в механику динамической сверхпластичности. – Бишкек: КРСУ, 2006. – 134 с.
4. Рудаев Я.И., Сулайманова С.М. Двумерная задача прессования полосы с использованием сверхпластичности //V Международная научная конференция «Прочность и разрушение материалов и конструкций». – Т.2. – Оренбург, Россия, 2008. - 424 с.