

**ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ
НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

М.И. Иманалиев, А.Б. Байзаков

Изучена разрешимость задачи Коши для сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнения в частных производных; принцип сжатых отображений; интегральные уравнения.

До сих пор остается малоисследованной областью проблема выяснения разрешимости задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных. В [2, 3] найдены разрешимость и структура решений задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных, где для них предлагается аналитический метод построения решений классической задачи Коши. Сутью предложенного метода является преобразование решений исходной задачи Коши в эквивалентное ей интегральное уравнение Вольтерра, к которой применим принцип сжатых отображений. Целью настоящей работы является применение указанного аналитического метода к исследованию разрешимости задачи Коши для сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка

$$\varepsilon^3 u_{ttx} + \alpha \varepsilon^2 u_{tx} + \beta \varepsilon^2 u_{tt} + \alpha \beta \varepsilon u_t + (\alpha + 1) \varepsilon u_x + \beta (\alpha + 1) u = f(t, x, u(t, x)) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$u_t(0, x) = \psi(x), \quad (3)$$

где α, β – некоторые положительные постоянные, $f(t, x, u, u_t, u_x)$ – известная непрерывная функция; $\varphi(x), \psi(x)$ – заданные непрерывные функции, равномерно ограниченные вместе со своими производными входящими в (1), $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Решение задачи Коши (1)–(3) ищем в виде

$$u(t, x) = c(t, x) + \int_0^t \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s) - \frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin \frac{1}{\varepsilon} (t-s) Q(s, \rho) d\rho ds, \quad (4)$$

где $c(t, x)$ – известная непрерывная функция, причем

$$c(0, x) = \varphi(x),$$

$$c_t(0, x) = \psi(x),$$

$Q(t, x)$ – новая неизвестная функция, которую необходимо определить.

Для определения функции $Q(t, x)$ необходимо подставлять (4) в (1). С этой целью из (4) последовательно находим следующие соотношения:

$$u_t(t, x) = c_t - \frac{\alpha}{\varepsilon} \int_0^t \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s) - \frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin \frac{1}{\varepsilon} (t-s) Q(s, \rho) d\rho ds +$$

$$+ \int_0^t \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s) - \frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^3} \cos \frac{1}{\varepsilon} (t-s) Q(s, \rho) d\rho ds.$$

Учитывая (4) имеем:

$$u_t = c_t - \frac{\alpha}{\varepsilon}(u - c) + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s) - \frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^3} \cos \frac{1}{\varepsilon}(t-s) Q(s, \rho) d\rho ds. \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u_{tt} + \frac{\alpha}{\varepsilon} u_t &= c_{tt}(t, x) + \frac{\alpha}{\varepsilon} c_t + \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^3} Q(t, \rho) d\rho - \frac{\alpha}{\varepsilon^2}(u - c) - \\ &- \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s) - \frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin \frac{1}{\varepsilon}(t-s) Q(s, \rho) d\rho ds = \\ &= c_{tt} + \frac{\alpha}{\varepsilon} c_t + \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^3} Q(t, \rho) d\rho - \frac{\alpha+1}{\varepsilon^2}(u - c). \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда дифференцируя обе части получим:

$$\begin{aligned} u_{tx} + \frac{\alpha}{\varepsilon} u_{tx} &= c_{tx} + \frac{\alpha}{\varepsilon} c_{tx} + \frac{1}{\varepsilon^3} Q(t, x) - \\ &- \frac{\beta}{\varepsilon} \left[u_{tt} + \frac{\alpha}{\varepsilon} u_t + \frac{\alpha+1}{\varepsilon^2}(u - c) - c_{tt} - \frac{\alpha}{\varepsilon} c_t \right] - \frac{\alpha+1}{\varepsilon^2}(u_x - c_x). \end{aligned} \quad (7)$$

Умножая обе части (7) на ε^3 имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 u_{tx} + \alpha \varepsilon^2 u_{tx} + \beta \varepsilon^2 u_{tt} + \alpha \beta \varepsilon u_t + (\alpha+1) \varepsilon u_x + \beta(\alpha+1) u &= \\ = \varepsilon^3 c_{tx} + \alpha \varepsilon^2 c_{tx} + \beta \varepsilon^2 c_{tt} + \alpha \beta \varepsilon c_t + (\alpha+1) \varepsilon c_x + \beta(\alpha+1) c + Q(t, x). \end{aligned} \quad (8)$$

Заменяя левую часть уравнения (1) соотношением (8) имеем:

$$Q(t, x) = f \left(t, x, c + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s) - \frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin \frac{1}{\varepsilon}(t-s) Q(s, \rho) d\rho ds \right) + H(t, \varepsilon, c) = A Q, \quad (9)$$

$$\text{где } H(t, \varepsilon, c) \equiv \varepsilon^3 c_{tx} + \alpha \varepsilon^2 c_{tx} + \beta \varepsilon^2 c_{tt} + \alpha \beta \varepsilon c_t + (\alpha+1) \varepsilon c_x + \beta(\alpha+1) c. \quad (10)$$

Нелинейное интегральное уравнение (9) будем решать методом принципа сжатых отображений [1].

Предположим:

При всех $\{t \geq 0, -\infty < x < \infty\}$ функция $H(t, \varepsilon, c)$ непрерывна и ограничена

$$\|H(t, \varepsilon, c)\| \leq M_0 = \text{const}.$$

В области $R = \{0 \leq t < \infty, -\infty < x < u < \infty\}$ функция $f(t, x, u)$ непрерывна и ограничена

$$\|f(t, x, u)\| \leq M_1 = \text{const}. \quad (11)$$

Кроме того, в этой области функция $f(t, x, u)$ удовлетворяет условию Липшица по третьему аргументу u :

$$\|f(t, x, u_2) - f(t, x, u_1)\| \leq L \|u_2 - u_1\|, \quad (12)$$

где L – некоторая положительная постоянная.

Правую часть (9) рассмотрим как оператор $A[Q]$, действующий на функцию $Q(t, x)$.

Имеем $\|A[Q]\| \leq \|f(t, x, u) + H(t, \varepsilon, c)\| \leq M$, где $M = M_0 + M_1 = \text{const}$.

Учитывая (9), (11)–(12) оценим разность

$$\begin{aligned} \|Q_1(t, x) - Q_2(t, x)\| &\leq \left\| f \left(t, x, c + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s) - \frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin \frac{1}{\varepsilon}(t-s) Q_1(t, s) d\rho ds \right) - \right. \\ &\left. - f \left(t, x, c + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s) - \frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin \frac{1}{\varepsilon}(t-s) Q_2(t, s) d\rho ds \right) \right\| \leq \end{aligned}$$

$$\leq L \left\{ \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin \frac{1}{\varepsilon}(t-s) \|Q_1(t,s) - Q_2(t,s)\| d\rho ds \right\} \leq L,$$

$$L \frac{1}{\alpha\beta} \|Q_1(t,x) - Q_2(t,x)\| \leq \frac{1}{2} \|Q_1(t,x) - Q_2(t,x)\|,$$

где α, β – такие, что выполняется

$$\frac{L}{\alpha\beta} \leq \frac{1}{2}.$$

По принципу сжатых отображений, отсюда следует, что нелинейное интегральное уравнение (9) при всех $\{t \geq 0, -\infty < x < \infty\}$ имеет единственное непрерывное и ограниченное решение $Q(t,x)$.

Далее докажем ограниченность решений задачи Коши (1)–(3). Из (4) при всех $t \geq 0, -\infty < x < \infty$ имеем неравенство:

$$\|u(t,x)\| \leq \|c(t,x)\| + \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \left| \sin \frac{1}{\varepsilon}(t-s) \right| \|Q(s,\rho)\| d\rho ds \leq c_0 + \frac{M}{\alpha\beta} = M_{00} = const.$$

Итак, доказана

Теорема. Пусть 1) при всех $t \geq 0, -\infty < x < \infty$ функции $c(t,x), c(0,x) = \varphi(x)$ равномерно ограничены вместе со своими производными входящими в (1); в области $R = \{0 \leq t < \infty, -\infty < x < u < \infty\}$ функция $f(t,x,u)$ непрерывна и ограничена

$$\|f(t,x,u)\| \leq M_1 = const.$$

Кроме того, в этой области R функция $f(t,x,u)$ удовлетворяет условию Липшица по третьему аргументу:

$$\|f(t,x,u_2) - f(t,x,u_1)\| \leq L \|u_2 - u_1\|;$$

$$\frac{L}{\alpha\beta} = \frac{1}{2}.$$

Тогда при всех $t \geq 0, -\infty < x < \infty$ нелинейное дифференциальное уравнение (1) с начальными данными имеет единственное ограниченное решение.

Замечание. Если уравнение (1) окажется линейным, т.е. правая часть имеет вид $f = f(t,x)$, то решение задачи (1)–(3) можно найти в квадратурах

$$u(t,x) = c(t,x) + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s) - \frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin \frac{1}{\varepsilon}(t-s) [f(s,\rho) + H(s,\varepsilon,c(s,\rho))] d\rho ds,$$

где $H(t,\varepsilon,c(t,x))$ определяется из соотношения (10).

Это утверждение следует из (4), (9).

Литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
2. Иманалиев М.И., Байзаков А.Б. К теории интегро-дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2008. – Вып. 37. – С. 3–7.
3. Иманалиев М.И., Иманалиев Т.М., Какишев К. О задачах Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 36. – С. 19–28.