

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ РЕАГИРУЮЩЕЙ СМЕСИ ГАЗОВ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Д.А. Искендерова, А.М. Токторбаев

Исследуется задача Коши для уравнений, описывающих течение реагирующей смеси газов в пористой среде. В начальный момент времени все характеристики среды известны и имеют разные пределы на бесконечности. Доказательство теоремы существования и единственности обобщенного решения проводится методом априорных оценок.

Ключевые слова: плотность, удельный объем, температура, концентрация компонент, априорные оценки, пористость среды.

1. Постановка задачи и основной результат. Система уравнений, описывающая течение реагирующей смеси газов с учетом пористости среды имеет вид [1, 2]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v = \frac{1}{\rho},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\chi}{v} \frac{\partial c}{\partial x} \right) - c g, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{v} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\theta}{v} \right) - \beta(x) |u|^\alpha u, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda_1}{v} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda_2}{v} \theta \frac{\partial c}{\partial x} \right) - r \frac{\theta}{v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \delta c g. \end{aligned} \quad (1)$$

В предположении постоянства положительных коэффициентов $\chi, \mu, \lambda_1, \lambda_2, \delta, r$ система уравнений (1) является замкнутой относительно неизвестных функций ρ, c, u, θ . $\beta(x)$ – коэффициент проницаемости – непрерывная, неотрицательная, ограниченная функция и $\int_{-\infty}^{\infty} \beta(x) dx \leq C$; $0 \leq \alpha \leq 1$.

Рассмотрим движение смеси в полосе: $\Pi = \{ (x, t) : x \in R, 0 < t < T \}$, $R = (-\infty, \infty)$.

Начальные условия записываются в виде:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(x), \quad c|_{t=0} = c_0(x), \quad v|_{t=0} = v_0(x), \quad (2)$$

$0 < c_0(x) \leq 1, \quad 0 < m_0 \leq (v_0(x), \theta_0(x)) \leq M_0 < \infty$ и имеют конечные пределы на бесконечности:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) &= u_0^1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) = u_0^2, \quad u_0^1 < u_0^2, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} v_0(x) &= v_0^1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v_0(x) = v_0^2, \quad v_0^1 \neq v_0^2, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} c_0(x) &= c_0^1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c_0(x) = c_0^2, \quad c_0^1 \neq c_0^2, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \theta_0(x) &= \theta_0^1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta_0(x) = \theta_0^2, \quad \theta_0^1 \neq \theta_0^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем вспомогательные функции $\psi(x), f(x), \gamma(x), \phi(x)$, обладающие свойствами:

$$\begin{aligned} 0 < C_1^{-1} < \psi(x) < C_1, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} v_0(x) \psi(x) &= 1, \quad \psi'(x) \in W_2^1(R), \\ |f(x)| < C_2 < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= u_0^1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = u_0^2, \\ 0 < f'(x) \leq C_3, \quad f'(x) \in W_2^1(R), \quad f'(x) &\in L_1(R), \\ 0 < C_4^{-1} < \phi(x) < C_4, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \theta_0(x) \phi(x) &= 1, \quad \phi'(x) \in W_2^1(R), \\ 1 \leq \gamma(x) < C_5 < \infty, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} c_0(x) \gamma(x) &= 1, \quad \gamma'(x) \in W_2^1(R). \\ (\phi'(x))^2 < \delta f'(x), \quad 0 < \delta < 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Существование таких функций нетрудно проверить.

Теорема. Пусть начальные данные (2) удовлетворяют условиям (3) и $(u_0 - f, v_0 \psi - 1, \theta_0 \phi - 1, c_0 \gamma - 1) \in W_2^1(R)$.

Функция $g(\rho, c, \theta)$ является положительной и непрерывной в любой компактной области своих аргументов, а по $(\phi \theta)^{1/2}$, кроме того, удовлетворяет условию Липшица и $g(\rho, c, 1) = 0$.

Тогда в полосе $\Pi = R \times (0, T)$ с произвольной конечной высотой $T, 0 < T < \infty$ существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2), причем

$$(v \psi - 1) \in L_\infty(0, T; W_2^1(R)), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial t} \right) \in L_2(\Pi),$$

$$(u - f, \theta\phi - 1, c\gamma - 1) \in L_\infty(0, T; W_2^1(R)) \cap L_2(0, T; W_2^2(R)),$$

$0 < c(x, t) \leq 1$, $v(x, t)$, $\theta(x, t)$ – строго положительные, ограниченные функции.

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме: а) выводятся глобальные априорные оценки, положительные постоянные C , C_i , N_i , K_i в которых зависят только от данных задачи и величины T интервала времени, но не зависят от промежутка существования локального решения; б) доказывается локальная теорема существования аналогично [1]; в) на основе полученных глобальных априорных оценок локальное решение продолжается на весь промежуток времени $[0, T]$, $0 < T < \infty$.

Известно, что в одномерных нестационарных задачах вязкой газовой динамики априорные оценки удобнее всего получать в лагранжевых координатах. Введение их описано в [1].

2. Априорные оценки. Не ограничивая общности, примем все положительные постоянные в системе (1), равными единице. Из уравнений системы (1) и ограничений на данные задачи видно, что функции $v(x, t)$, $\theta(x, t)$ неотрицательны и $0 < c(x, t) \leq 1$.

Выведем закон сохранения. Сделаем замену, полагая $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\phi(x)\gamma(x)}$. Тогда система уравнений

(1) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\phi\gamma} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= 0, \quad v = \frac{1}{\rho}, \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{1}{\phi\gamma} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\phi\gamma v} \frac{\partial c}{\partial \xi} \right) - c g, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{\phi\gamma} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\phi\gamma v} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{\phi\gamma} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \beta(x) |u|^\alpha u, \quad p = \frac{\theta}{v}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\phi\gamma} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\phi\gamma v} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\phi\gamma} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\phi\gamma v} \theta \frac{\partial c}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{\phi\gamma} p \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\phi^2 \gamma^2 v} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + c g.$$

Лемма. При выполнении условий теоремы справедлива оценка

$$U(t) + \int_0^t W(\tau) d\tau \leq E = \text{const} > 0, \quad t \in [0, T] \quad (7)$$

где $U(t) = \int \left\{ \frac{1}{2}(u - f)^2 + \frac{1}{2}(c\gamma - 1)^2 + (\phi\theta - \ln \phi\theta - 1) + (v\psi - \ln v\psi - 1) \right\} dx$,

$$W(t) = \int \left\{ \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} + \frac{u_x^2}{v\theta} + \frac{c_x^2}{v} + \frac{\theta}{v} f' + g\phi(c\gamma - 1)^2 + \beta(x)|u|^\alpha (u - f)^2 \right\} dx.$$

Доказательство. Умножим первое уравнение системы (6) на $\gamma\left(\psi - \frac{1}{v}\right)$, второе на $\gamma(c\gamma - 1)$,

третье на $\phi\gamma(u - f)$, четвертое на $\gamma\left(\phi - \frac{1}{\theta}\right)$, сложим и проинтегрируем по R :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \left\{ \frac{1}{2}\phi\gamma(u - f)^2 + \frac{1}{2}(c\gamma - 1)^2 + \gamma(\phi\theta - \ln \phi\theta - 1) + \gamma(v\psi - \ln v\psi - 1) \right\} d\xi + \\ + \int \left\{ \frac{\theta_\xi^2}{v\theta^2 \phi^2 \gamma} + \frac{u_\xi^2}{v\theta \phi\gamma} + \frac{c_\xi^2}{v \phi^2 \gamma} + \frac{\theta}{v} f' + g(c\gamma - 1)^2 + \phi\beta(x)|u|^\alpha (u - f)^2 \right\} d\xi = \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{\psi}{\varphi\gamma} u_{\xi} d\xi + \int \frac{1}{\varphi\nu\gamma} u_{\xi} (f' + \gamma - 1) d\xi - \int \frac{\theta_{\xi}\varphi'}{\nu\theta\varphi^3\gamma} d\xi - \int \frac{c_{\xi}c\gamma'}{\nu\varphi^2\gamma} d\xi + \int \frac{c_{\xi}c\varphi'}{\nu\varphi^3} d\xi + \\
 &+ \int \frac{c_{\xi}\theta_{\xi}}{\nu\theta\varphi^2\gamma} d\xi + \int \frac{c_{\xi}\phi'}{\nu\phi^3\gamma} d\xi - \int g(c\gamma - 1) d\xi + \int cg\gamma \frac{\phi\theta - 1}{\theta} d\xi + \int \beta(\xi) |u|^{\alpha} f(u - f) \phi d\xi = \sum_{k=1}^{10} I_k
 \end{aligned}$$

Оценим каждое I_k , используя интегрирование по частям, неравенства Юнга, Коши, Гельдера, вложения. Интегрируя по времени полученное из (8) неравенство и применяя лемму Гронуолла, переходя к исходным переменным, выводим оценку (7). Лемма доказана.

Рассуждая аналогично, можно получить все оценки, необходимые для доказательства существования обобщенного решения. Единственность доказывается составлением однородного уравнения относительно разности двух совместных решений аналогично [4, 5].

Теорема полностью доказана.

Литература

1. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
2. Искендерова Д.А. Задача Коши для уравнений течения реагирующей смеси газов // Вестн. Казахск. гос. нац. ун-та. Сер. мат., мех., информатики. – 1998. – №9. – С. 77–92.
3. Искендерова Д.А., Токторбаев А.М. Разрешимость уравнений реагирующей смеси газов в неограниченной области // Тр. VI совещания Российско-Казахстанской рабочей группы по вычисл. и информ. технологиям. – Алматы, 2009. – С. 183–190.