УДК 517.95 (575.2) (04)

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЛИНИЕЙ ПЕРЕХОДА

А.Б. Осмоналиев

Исследована краевая задача для смешанно-гиперболических уравнений 4-го порядка с постоянными коэффициентами с характиристической линией перехода. Найдены достаточные условия существования единственного решения и приведены примеры.

Ключевые слова: функция Римана; условия согласования; существование и единственность решения.

Пусть область D представляет собой прямоугольник с вершинами $A_0(0,h_1), \mathrm{B}_0(\ell,h_1), B_1(\ell,-h_2), A_1(0,-h_2)$, а D_1 и D_2 являются частями этой области, определяемые как $D_1 = D \cap (y>0)$, $D_2 = D \cap (y<0)$, $(\ell,h_1,h_2>0)$.

Введем класс функций:

$$M = \{u(x,y) : u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D),\ u(x,y) \in C^2(D_1),$$

$$u(x,y) \in C^2(D_1),\ u_{xxyy}(x,y) \in C(D)\}.$$

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)$ из класса *M*, удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$u_{xxyy}(x,y) - bu_{yy}(x,y) = f_1(x,y), \quad b - const, \tag{1}$$

и граничным условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(\ell,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le h_1, \tag{2}$$

$$u(x,h_1) = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le \ell, \tag{3}$$

а в области D_2 — уравнению

$$u_{xxyy}(x,y) + du(x,y) = f_2(x,y), \quad d - const, \tag{4}$$

и граничным условиям

$$u(0,y) = \varphi_3(y), u_x(0,y) = \varphi_4(y), \quad -h_2 \le y \le 0, \tag{5}$$

$$u(x,-h_2) = \psi_2(x), \quad 0 \le x \le \ell, \tag{6}$$

где $\varphi_i(y)(i=1..4), \psi_j(x), f_j(x,y)(j=1,2)$ — заданные функции, причем

$$\varphi_1(0) = \varphi_3(0), \varphi_1(h_1) = \psi_1(0), \varphi_3(-h_2) = \psi_2(0), \psi_2'(0) = \varphi_4(-h_2). \tag{7}$$

Согласно постановке задачи введем следующие обозначения:

$$u(x,+0) = u(x,-0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le \ell, \tag{8}$$

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0) = \nu(x), \quad 0 \le x \le \ell, \tag{9}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ — пока неизвестные функции, причем в силу (7) для них должны быть выполнены следующие условия согласования:

$$\tau(0) = \varphi_3(0), \tau'(0) = \varphi_4(0), \nu(0) = \varphi_3'(0), \nu'(0) = \varphi_4'(0), \tau(\ell) = \varphi_2(0. \tag{10}$$

Для решения задачи 1 воспользуемся результатами следующих задач.

Задача 2. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению (1) и условиям (2), (3) и (8).

В работе [1] показано, что задача 2 имеет единственное решение и оно в случае $b>0$ представляется в следующем виде:

$$u(x,y)=\cos(\sqrt{b}x)\varphi_1(y)+\frac{1}{\sqrt{b}}\sin(\sqrt{b}x)\chi_1(y)-\frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^x \sin\left[\sqrt{b}(\xi-x)\right]\left(\tau''(\xi)+b\tau(\xi)\right)d\xi-$$

$$-\frac{y}{\sqrt{b}}\int_0^x \sin\left[\sqrt{b}(\xi-x)\right]\left(\chi_2''(\xi)+b\chi_2(\xi)\right)d\xi+\frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^x\int_0^y(\eta-y)\sin\left[\sqrt{b}(\xi-x)\right]f_1(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{11}$$

где $\chi_1(y)$ и $\chi_2(x)$ являются решениями следующей системы интегральных уравнений:

$$\begin{cases}\chi_1(y)=\Phi_1(y)+\dfrac{y}{\sin(\sqrt{\mathrm{b}}\ell)}\displaystyle\int_0^\ell \sin\left[\sqrt{b}(\xi-\ell)\right](\chi_2''(\xi)+b\chi_2(\xi))d\xi,\\ \displaystyle\int_0^x \sin\left[\sqrt{b}(\xi-x)\right](\chi_2''(\xi)+b\chi_2(\xi))d\xi=\Phi_2(x),\end{cases} \tag{12}$$

в которой

$$\Phi_1(y)=\frac{\sqrt{b}}{\sin(\sqrt{b}\ell)}\Big[\varphi_2(y)-\cos\left[\sqrt{b}\ell\right]\varphi_1(y)+\frac{1}{\sqrt{b}}\sin\left[\sqrt{b}\ell\right]\varphi_4(0)-\varphi_2(0)+\cos\left[\sqrt{b}\ell\right]\varphi_1(0)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^\ell d\xi\int_0^y(\eta-y)\sin\left[\sqrt{b}(\xi-\ell)\right]f_1(\xi,\eta)d\eta\Big],\quad \Phi_2(x)=\frac{\sqrt{b}}{h_1}\tau(x)+F_1(x) \tag{13}$$

где

$$F_1(x)=\frac{\sqrt{b}}{h_1}\Big[-\psi_1(x)+\cos(\sqrt{b}\,x)\varphi_1(h_1)+\frac{1}{\sqrt{b}}\sin(\sqrt{b}x)\psi_1'(0)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{b}}\sin\left[\sqrt{b}x\right]\varphi_4(0)-\cos\left[\sqrt{b}x\right]\varphi_1(0)+\frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^x d\xi\int_0^{h_1}(\eta-h_1)\sin\left[\sqrt{b}(\xi-x)\right]f_1(\xi,\eta)d\eta\ \Big].$$

Тогда решение (11) можем переписать в виде

$$u(x,y)=\left[1-\frac{y}{h_1}\right]\tau(x)+F_2(x,y), \tag{14}$$

где уже $\chi_1(y)=\Phi_1(y)+\dfrac{y}{\sin(\sqrt{\mathrm{b}}\ell)}\Phi_2(\ell)$,

$$F_2(x)=\cos\left[\sqrt{b}x\right]\varphi_1(y)+\frac{1}{\sqrt{b}}\sin\left[\sqrt{b}x\right]\chi_1(y)-\frac{1}{\sqrt{b}}\sin\left[\sqrt{b}x\right]\varphi_4(0)-$$

$$-\cos\left[\sqrt{b}x\right]\varphi_1(0)-\frac{y}{\sqrt{b}}F_1(x)+\frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^x\int_0^y(\eta-y)\sin\left[\sqrt{b}(\xi-x)\right]f_1(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Теперь рассмотрим следующую задачу.

Задача 3. Найти $u(x,y)$, удовлетворяющую в области D_2 уравнению (4) и условиям (5), (8) и (9).

Согласно работе [2] решение этой задачи представляется в виде

$$u(x,y)=\int_0^x \vartheta_{2\xi\xi}(x,y;\xi,0)\nu(\xi)d\xi+\int_0^x \vartheta_{2\eta\xi\xi}(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi+$$
$$+y\nu(x)-\tau(x)+F_3(x,y), \tag{15}$$

где

$$F_3(x,y)=\vartheta_{2\eta\xi}(x,y;0,y)\varphi_3(y)-\vartheta_{2\eta}(x,y;0,y)\varphi_4(y)+$$
$$+\int_0^y\left[\vartheta_{2\eta\eta}(x,y;0,\eta)\varphi_4(\eta)-\vartheta_{2\eta\eta\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_3(\eta)\right]d\eta+\int_0^x\int_0^y\vartheta_2(x,y;\xi,\eta)f_2(\xi,\eta)d\xi d\eta-$$
$$-\vartheta_2(x,y;0,0)\varphi_4'(0)+\vartheta_{2\xi}(x,y;0,0)\varphi_3'(0)-\vartheta_{2\eta}(x,y;0,0)\varphi_4(0)+\vartheta_{2\eta\xi}(x,y;0,0)\varphi_3(0),$$

а $\vartheta_2(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\mathrm{d}^n}{\left[(2n+1)!\right]^2}(\xi-x)^{2n+1}(\eta-y)^{2n+1}$ (16)

– функция Римана [3] для уравнения (4).

Из (14) вычислив $u_y(x,y)$ при $y=0$ имеем:

$$\nu(x)=-\frac{1}{h_1}\tau(x)+F_{2y}(x,0), \quad (17)$$

а из (15) используя условие (6) и равенство (17) получим:

$$\left(\frac{h_2}{h_1}-1\right)\tau(x)+\int_0^x K(x,\xi)\tau(\xi)d\xi=P(x), \quad (18)$$

где $K(x,\xi)=\vartheta_{2\eta\xi\xi}(x,-h_2;\xi,0)-\frac{1}{h_1}\vartheta_{2\xi\xi}(x,-h_2;\xi,0)$,

$$P(x)=\int_0^x\vartheta_{2\xi\xi}(x,-h_2;\xi,0)F_{2y}(\xi,0)d\xi-h_2F_{2y}(x,0)+F_3(x,-h_2)-\psi_2(x).$$

Если $\frac{h_2}{h_1}\neq 1$, то равенство (19) как уравнение Вольтерра 2-го рода всегда имеет единственное решение. А если $\frac{h_2}{h_1}=1$, то дважды дифференцируя обе части уравнения (18) вновь получим уравнение Вольтерра 2-го рода.

Таким образом, неизвестная функция $\tau(x)$ найдена, тогда $\nu(x)$ легко может быть определена по равенству (18).

Итак, доказана

Теорема. Если $\varphi_i(y)\in C\left[0,h_1\right](i=1,2),\varphi_j(y)\in C\left[-h_2,0\right]\ (j=3,4),\ \ \psi_k(x)\in C\left[0,\ell\right](k=1,2)$ и выполнены условия (7), (10), то решение задачи 2 в классе *M* существует, единственно и определяется в областях D_1 и D_2 по формулам (14) и (15) соответственно.

Пример. Пусть в области $D=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$, представляющей квадрат с вершинами $A_0(0,1),\mathrm{B}_0(1,1),B_1(1,-1),A_1(0,-1)$ и состоящей из подобластей $D_1=D\cap(y>0)$, и $D_2=D\cap(y<0)$, требуется найти функцию $u(x,y)\in M$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$u_{xxxy}(x,y)+u_{yy}(x,y)=y,$$

и краевым условиям

$$u(0,y)=y,\ u(1,y)=2^y,\ \ 0\le y\le 1,\ \ u(x,h_1)=\psi_1(x),\ \ 0\le x\le \ell,$$

а в области D_2 уравнению $u_{xxyy}(x,y)=4$

и краевым условиям

$$u(0,y)=y^2,u_x(0,y)=y^3,\ \ -1\le y\le 0,$$
$$u(x,-1)=1-x,\ \ 0\le x\le 1,$$

Единственное решение этой задачи представляется в области D_1 в виде

$$u(x,y)=y\cos(x)+\frac{\sin x}{\sin 1}\left[2^y-y\cos 1-\frac{1}{6}y^3+y^3\cos 1-1\right]+y\frac{\sin x}{\sin 1}\left[\cos 1+\sin 1-\frac{1}{6}\cos 1-\frac{5}{6}\right]+$$

$$+\tau(x)-y\left[\cos x+\sin x+\tau(x)-\frac{1}{6}\cos x-x-\frac{5}{6}\right]+\frac{1}{6}y^3-\frac{1}{6}y^3\cos x,$$

а в области D_2 в виде $u(x,y)=y^2+y^3x+\tau(x)+y\nu(x)+y^2x^2$,

где неизвестные функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ определяются следующим образом

$$\tau(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\cos x+\ln 2\frac{\sin x}{\sin 1}-\frac{1}{6}\sin x ctg 1-\frac{5}{6}\frac{\sin x}{\sin 1}+x+\frac{5}{6}-x^2\right],$$

$$\nu(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\cos x+\ln 2\frac{\sin x}{\sin 1}-\frac{1}{6}\sin x ctg 1-\frac{5}{6}\frac{\sin x}{\sin 1}+x+\frac{5}{6}+x^2\right].$$

Легко можно проверить, что найденное решение удовлетворяет всем требованиям поставленной задачи.

Литература

1. *Осмоналиев А.Б.* Задача Дирихле для одного уравнения четвертого порядка гиперболического типа // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Сер. матем., механика, информатика. – Алматы, 2004. – № 2(41). – С. 19–26.
2. *Осмоналиев А.Б.* Краевые задачи для гиперболических и смешанных параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2007. – 21 с.
3. *Джураев Т.Д., Сопуев А.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.