УДК 517.968 (575.2) (04)

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ СЛАБОНЕЛИНЕЙНОГО НЕЯВНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

С. Искандаров, М.А. Темиров

Устанавливаются достаточные условия ограниченности и стабилизации на полуоси решений слабонелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка.

Ключевые слова: ограниченность; стабилизация; метод весовых и срезывающих функций.

Все фигурирующие ниже функции являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0, t \geq \tau \geq t_0$; $|u_k|,|v_k|,|w_k| < \infty \quad (k = 1..m)$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; ДУ – дифференциальное уравнение.

Задача. Установить достаточные условия немалости членов ограниченности на J и стремления к конечным пределам (стабилизации) при $t \to \infty$ любого решения ИДУ первого порядка типа Вольтерра вида:

$$x'(t) + a(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)x'(\tau)(\tau)d\tau = f(t) + \sum_{j=1}^{m} F_k(t, x(\alpha_k(t)), \int_{t_0}^{t} H_k(t,\tau, x(\beta_k(\tau)))d\tau), \quad t \geq t_0, \tag{1}$$

где функции $F_k(t,u_k, v_k)$, $H_k(t,\tau,w_k) \quad (k = 1..m)$ в области $D = \{t \geq t_0, \quad |u_k| < \infty, |v_k| < \infty), \; |w_k| < \infty \; (k = 1..m)\}$ удовлетворяют условию “слабой нелинейности”:

$$|F_k(t,u_k, v_k)| \leq f_{0k}(t) + g_k(t)|u_k| + q_k(t)|v_k|,$$

$$|H_j(t,\tau,w_k| \leq h_k(t,\tau)|w_k| \quad (k = 1..m) \tag{SN}$$

с неотрицательными функциями $f_{ok}(t), g_k(t), q_k(t), h_k(t,\tau) \; (k = 1..m)$, и в случае справедливости “условий запаздывания”:

$$t_0 \leq \alpha_k(t) \leq t, \; t_0 \leq \beta_k \leq t \quad (k = 1..m). \qquad (\alpha), (\beta)$$

Как видно из условий $(\alpha), (\beta)$, начальное множество E_{t_0} для ИДУ (1) состоит из одной точки $\{t_0\}$.

Речь идет о решениях ИДУ (1) $x(t) \in C^1(J, R)$ с любыми начальными данными $x(t_0)$. В силу условий (SN), $(\alpha), (\beta)$ такие решения существуют (см., например, [1]).

Отметим, что в [2] сформулированная задача для ограниченности на J решений при $a(t) \equiv 0$ изучена методом возведения уравнений в квадрат [3, с. 28], методом срезывающих функций [3, с. 41] и с использованием леммы [2] об интегральном неравенстве с запаздываниями; в [1] – для случая стремления к конечным пределам решений ИДУ вида (1) с $a(t) \equiv f(t) \equiv 0$ при $t \to \infty$ методом интегральных уравнений [3, с. 12-13] и методом интегральных неравенств с запаздыванием [1].

В настоящей работе приведенная задача для ИДУ (1) решается методом весовых и срезывающих функций [1] и методом интегральных неравенств с запаздываниями [2]. При этом обосновывается необходимость введения некоторой положительной весовой функции и выявляется влияние интегральных возмущений на ограниченность решений ДУ вида:

$$x'(t) + a(t)x(t) = f(t) + F_1(t, x(\alpha_1(t))). \qquad (1*)$$

Пусть [3]: $0 < \varphi(t)$ – некоторая весовая функция,

$$K(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n} K_i(t,\tau), \qquad (K)$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t), \qquad (f)$$

$\psi_i(t)$ $(i = 1..n)$ – некоторые срезывающие функции,

$R_i(t,\tau) \equiv \varphi(t)K_i(t,\tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1}$, $E_i(t) \equiv \varphi(t) f_i(t)(\psi_i(t))^{-1}$ $(i = 1..n)$,

$$R_i(t,t_0) = A_i(t) + B_i(t) \quad (i = 1..n), \qquad (R)$$

$c_i(t)$ $(i = 1..n)$ – некоторые функции.

Для произвольно фиксированного решения $x(t)$ ИДУ (1) умножаем на $\varphi(t)x'(t)$ [4], интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом вводим условия (K), (f), функции $\psi_i(t), R_i(t,\tau)$, $E_i(t)$, $c_i(t)$ $(i = 1..n)$, используем леммы 1.4, 1.5 [5], и с учетом условия (SN) приходим следующему неравенству:

$$
\begin{aligned}
&2\int_{t_0}^{t} \varphi(s)(x'(s))^2 ds + a(t)\varphi(t)(x(t))^2 - \int_{t_0}^{t} (a(s)\varphi(s))'(x(s))^2 ds + \\
&+\sum_{i=1}^{n} \{A_i(t)(X_i(t,t_0))^2 - \int_{t_0}^{t} A_i'(s)(X_i(s,t_0))^2 ds + B_i(t)(X_i(t,t_0))^2 - \\
&-2E_i(t)X_i(t,t_0) + c_i(t) - \int_{t_0}^{t} [B_i'(s)(X_i(s,t_0))^2 - 2E_i'(s)X_i(s,t_0) + c_i'(s)]ds + \\
&+\int_{t_0}^{t} R_{i\tau}'(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2 d\tau - \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} R_{is\tau}''(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2 d\tau ds\} \le c_* + \\
&+2\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\left|x'(s)\right|\{\sum_{k=1}^{m}[f_{ok}(s) + g_k(s)\left|x(\alpha_k(s))\right| + \int_{t_0}^{s} G_k(s,\tau)\left|x(\beta_k(\tau))\right| d\tau]\}ds, \quad t \le t_0,
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

где

$$X_i(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t} \psi_i(s)x'(s)ds \quad (i = 1..n), \quad c_* = a(t_0)\varphi(t_0)(x(t_0))^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i(t_0), \; G_k(t,\tau) \equiv q_k(t)h_k(t,\tau) \; (k = 1..m).$$

Применяя к подынтегральной мультипликационной функции неравенство $2u_1u_2 \le u_1^2 + u_2^2$ $(\forall u_1, u_2 \in R)$, имеем

$$2\int_{t_0}^{t} \varphi(s)x'(s)\{\sum_{k=1}^{m}[f_{ok}(s) + g_k(s)|x(\alpha_k(s))| + \int_{t_0}^{s} G_k(s,\tau)|x(\beta_k(\tau))|d\tau]\}ds \le \int_{t_0}^{t}\varphi(s)(x'(s))^2 ds +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\varphi(s)\{\sum_{k=1}^{m}[f_{ok}(s) + g_k(s)|x(\alpha_k(s))| + \int_{t_0}^{s} G_k(s,\tau)|x(\beta_k(\tau))|d\tau]\}^2 ds,\ t \le t_0\,. \tag{3}$$

В силу $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, $\forall a,b \in R$ имеем:

$$\{\sum_{k=1}^{m}[f_{ok}(s) + g_k(s)|x(\alpha_k(s))| + \int_{t_0}^{s} G_k(s,\tau)|x(\beta_k(\tau))|d\tau]\}^2 \le 2(\sum_{k=1}^{m} f_{ok}(s))^2 +$$

$$+2\{\sum_{k=1}^{m}[g_k(s)|x(\alpha_k(s))| + \int_{t_0}^{s} G_k(s,\tau)|x(\beta_k(\tau))|d\tau]\}^2\,. \tag{4}$$

С учетом (3), (4) из неравенства (2) получаем следующее неравенство:

$$V(t) \equiv \int_{t_0}^{t}\varphi(s)(x'(s))^2 ds + a(t)\varphi(t)(x(t))^2 + \sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(X_i(t,t_0))^2 + B_i(t)(X_i(t,t_0))^2 -$$

$$-2E_i(t)X_i(t,t_0) + c_i(t) - \int_{t_0}^{t}[B_i'(s)(X_i(s,t_0))^2 - 2E_i'(s)X_i(s,t_0) + c_i'(s)]ds +$$

$$+\int_{t_0}^{t} R_{i\tau}'(t,\tau)(X_i(t,\tau))^2 d\tau \le c_* + \int_{t_0}^{t}\{(a(s)\varphi(s))'(x(s))^2 ds + \sum_{i=1}^{n}[A_i'(s)(X_i(s,t_0))^2 +$$

$$+\int_{t_0}^{s} R_{is\tau}''(s,\tau)(X_i(s,\tau))^2 d\tau]\}ds + 2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)(\sum_{k=1}^{m} f_{ok}(s))^2 ds +$$

$$+2\int_{t_0}^{t}\varphi(s)\{\sum_{k=1}^{m}[g_k(s)|x(\alpha_k(s))| + \int_{t_0}^{s} G_k(s,\tau)|x(\beta_k(\tau))|d\tau]^2 ds\,. \tag{5}$$

Теорема. Пусть 1) выполняются условия (SN), $(\alpha), (\beta)$, $(K), (f), (R)$; $\varphi(t) > 0$; 2) $a(t) = a_1(t) + a_2(t)$, $a_1(t) > 0$; $(\varphi(t)a_1(t))' \ge 0$, $a_2(t) \ge 0$, существует функция $a_2^*(t) \in L^1(J, R_+)$ такая, что $(\varphi(t)a_2(t))' \le a_2^*(t)\varphi(t)a(t)$; 3) $A_i(t) \ge 0$, $B_i(t) \ge 0$, $B_i'(t) \le 0$, существуют функции $A_i^*(t) \in L^1(J,R_+)$, $c_i(t)$ такие, что $A_i'(t) \le A_i^*(t)A_i(t)$, $(E_i^{(k)}(t))^2 \le B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)$ $(i = 1..n;\ k = 0,1)$; 4) $R_{i\tau}'(t,\tau) \ge 0$, существуют функции $R_i^*(t) \in L^1(J,R_+)$ такие, что $R_{it\tau}''(t,\tau) \le R_i^*(t)R_{i\tau}'(t,\tau)$ $(i = 1..n)$; 5) $\varphi(t)\{(\sum_{k=1}^{m} f_{0k}(t))^2 + \sum_{k=1}^{m}[g_k(t)(a(\alpha_k(t))\varphi(\alpha_k(t)))^{-\frac{1}{2}} + \ +\int_{t_0}^{t} G_k(t,\tau)(a(\beta_k(\tau))\varphi(\beta_k(\tau)))^{-\frac{1}{2}} d\tau]^2 \in L^1(J,R_+)$.

Тогда для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) выполняются утверждения:

$$x(t) = O(1)\,, \tag{6}$$

$$\int_{t_0}^{t}\varphi(s)(x'(s))^2 ds = \varphi(t)a_1(t)O(1)\,. \tag{7}$$

Идея доказательства такова. В силу условий 2) – 5) теоремы из (5) имеем:

$$V(t) \le c_{**} + \int_{t_0}^{t} \{\frac{(a_1(s)\varphi(s))'}{a_1(s)\varphi(s)} + a_2^*(s) + \sum_{i=1}^{n}[A_i^*(s) + R_i^*(s)]\}V(s)ds +$$

$$+2\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\{g_k(s)(a(\alpha_k(s))\varphi(\alpha_k(s)))^{-\frac{1}{2}}(V(\alpha_k(s))^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\int_{t_0}^{s} G_k(s,\tau)(a(\beta_k(\tau))\varphi(\beta_k(\tau)))^{-\frac{1}{2}}(V(\beta_k(\tau)))^{\frac{1}{2}}d\tau\}^2 ds,\ t \ge t_0\ , \quad (8)$$

где $c_{**} = c_* + 2\int_{t_0}^{\infty}\varphi(s)(\sum_{k=1}^{m}[f_{0k}(s))^2 ds < \infty$.

Далее к интегральному неравенству (8) применяется лемма из [2].

Следствие. Если 1) выполняются все условия теоремы и $\varphi(t)a_1(t) = O(1)$; 2) $\varphi(t) > 0,\ (\varphi(t))^{-1} \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\})$, то любое решение $x(t)$ ИДУ (1) стремится к конечному пределу при $t \to \infty$.

Утверждение следствия вытекает из:

$$|x'(t)| = (\varphi(t))^{\frac{1}{2}}|x'(t)|\,(\varphi(t))^{-\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2}[\varphi(t)(x'(t))^2 + (\varphi(t))^{-1}]$$

интегрированием от t_0 до t и переходом к пределу при $t \to \infty$, аналогично теореме 2 и следствию 1 из [6].

Приведем простейшие примеры.

Пример 1. Для ИДУ

$$x'(t) + e^{-t}x(t) + \int_0^t e^{-t}e^{t^2+\tau^2}\frac{1}{t-\tau+1}x'(\tau)d\tau = -\frac{e^{-t}e^{t^2}}{t+2} + \frac{e^{-t}}{t^2+1}x(\frac{t}{2}),\ \ t \ge 0$$

выполняются все условия следствия при $\varphi(t) \equiv e^t,\ n = 1,\ \psi_1(t) \equiv e^{t^2},\ A_1(t) \equiv 0,$ $B_1(t) \equiv \frac{1}{t+1},\ E_1(t) \equiv \frac{-1}{t+2},\ c_1(t) \equiv \frac{1}{t+1}$, и, значит, любое его решение $x(t)$ стремится к конечному пределу при $t \to \infty$, т.е. $\left|\lim_{t\to\infty} x(t)\right| = |x(\infty)| < \infty$.

Из этого примера следует, что есть необходимость введения некоторой весовой функции $\varphi(t) > 0$ для установления условий стабилизации решений при $t \to \infty$ ИДУ (1).

Пример 2. ИДУ

$$x'(t) + x(t) + \int_0^t e^{2t+2\tau}x'(\tau)d\tau = 3e^{2t} + e^{-t}x(\frac{t}{3})\sin[x(t) - e^{2t}],\ \ t \ge 0$$

удовлетворяет всем условиям теоремы при $\varphi(t) \equiv 1,\ n = 1,\ \psi_1(t) \equiv e^{2t},\ A_1(t) \equiv 0,$ $B_1(t) \equiv 1,\ E_1(t) \equiv 3,\ c_1(t) \equiv 9$. Поэтому все решения этого ИДУ ограничены при $t \ge 0$. Однако, соответствующее ДУ:

$$x'(t) + x(t) \equiv 3e^{2t} + e^{-t}x(\frac{t}{3})\sin[x(t) - e^{2t}],\ \ t \ge 0$$

имеет решение $x(t) = e^{2t}$, неограниченное при $t \in R_+$

где $G(t) \equiv b_{11}^*(t) + 2|b_{12}(t)|(b_{11}(t))^{-\frac{1}{2}} + 2[|b_{01}(t)| + |b_{02}(t)|]$.

Таким образом, выявлено влияние интегрального члена типа Вольтера на ограниченность решений ДУ вида (1*).

Литература

1. *Ведь Ю.А., Китаева Л.Н.* О стремлении к конечным пределам решений интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим, 1965. – Вып. 3. – С. 137–142.
2. *Ведь Ю.А., Искандаров С., Халилов А.Т.* Лемма об одном интегральном неравенстве с запаздываниями и ее применение к ограниченности решений вольтеррова неявного интегро-дифференциального уравнения // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып. 35. – С. 22–25.
3. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра. – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.
4. *Искандаров С.* Об ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка типа Вольтерра, неразрешенных относительно производной // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1980. – Вып. 13. – С. 185–192.
5. *Искандаров С*. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: Автореф. дисс… докт. физ.-мат.наук: 01.01.02. – Бишкек, 2003. – 34 с.
6. *Искандаров С.* Об асимптотических свойствах первых производных решений линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1984. – Вып. 17. – С. 161–165.