

УДК 517.956 (575.2) (04)

**НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ
ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

А. Сопуев, Н.К. Аркабаев

Доказано существование единственного решения нелокальной задачи с интегральным условием для линейного уравнения в частных производных третьего порядка.

Ключевые слова: уравнения; нелокальная задача; нелокальные условия; интегральные уравнения; ограниченное решение.

В области $D = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, 0 < y < h\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xxx} - u_{xy} + c(x, y)u = f(x, y), \quad (1)$$

где $c(x, y)$, $f(x, y)$ – заданные функции.

Нелокальными условиями принято называть такие условия, которые задают некоторую связь между значениями искомого решения в различных точках границы, либо в точках границы и внутренних точках, либо только во внутренних точках области. Задачи с нелокальными условиями называются нелокальными задачами.

Нелокальные задачи с интегральными условиями для линейных уравнений в частных производных рассмотрены в работах [1–4].

Уравнение (1) по классификации работы [5] соответствует первому каноническому виду относительно старших производных, так как уравнение характеристик имеет одну трехкратную действительную характеристику.

Задача 1. Найти в области D непрерывное и ограниченное вместе с производной u_x решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi(y), 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \tau(x), 0 \leq x < +\infty, \quad (3)$$

$$\int_0^{\alpha} u(x, y) dx = E(y), 0 \leq y \leq h, \alpha = \text{const} > 0, \quad (4)$$

где $\varphi(y)$, $\tau(x)$, $E(y)$ – заданные функции, причем

$$c(x, y), f(x, y) \in C(\bar{D}), E(y), \varphi(y) \in C^1[0, h], \tau(x) \in C^3[0, +\infty), \quad (5)$$

$$\int_0^{\alpha} \tau(x) dx = E(0), \tau(0) = \varphi(0). \quad (6)$$

Введя обозначение

$$u_x(x, y) = \mathcal{G}(x, y) \quad (7)$$

уравнение (1) запишем в виде

$$\mathcal{G}_{xx} - \mathcal{G}_y = F(x, y), \quad (8)$$

где $F(x, y) = f(x, y) - c(x, y)u$.

Пусть

$$u_x(0, y) = \theta(y), \quad (9)$$

где $\theta(y)$ – пока неизвестная функция. Тогда, в силу обозначения (7), из условий (9) и (3), для $\vartheta(x, y)$ получаем краевые условия

$$\vartheta(0, y) = \theta(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad \vartheta(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x < +\infty. \quad (10)$$

Решение задачи (8), (10) известно и представимо в виде [6]

$$\vartheta(x, y) = \int_0^y G_\xi(x, y; 0, \eta) \theta(\eta) d\eta + \int_0^{+\infty} G(x, y; \xi, 0) \tau'(\xi) d\xi + \int_0^y d\eta \int_0^{+\infty} G(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi, \quad (11)$$

где $G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}$ – функция Грина уравнения теплопроводности.

Учитывая обозначение $F(x, y)$, из (11) имеем:

$$u_x(x, y) = \Phi(x, y) + \int_0^y G_\xi(x, y; 0, \eta) \theta(\eta) d\eta - \int_0^y d\eta \int_0^{+\infty} G(x, y; \xi, \eta) c(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi, \quad (12)$$

где $\Phi(x, y) = \int_0^{+\infty} G(x, y; \xi, 0) \tau'(\xi) d\xi + \int_0^y d\eta \int_0^{+\infty} G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi$.

Интегрируя уравнение (12) по x будем иметь:

$$u(x, y) = \Phi_0(x, y) + \int_0^x ds \int_0^y G_\xi(s, y; 0, \eta) \theta(\eta) d\eta - \int_0^x ds \int_0^y d\eta \int_0^{+\infty} G(s, y; \xi, \eta) c(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi \quad (13)$$

где $\Phi_0(x, y) = \varphi(y) + \int_0^x \Phi(s, y) ds$. Заметим, что

$$\int_0^x ds \int_0^y G_\xi(s, y; 0, \eta) \theta(\eta) d\eta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\theta(\eta) d\eta}{\sqrt{y-\eta}} - \int_0^y G(x, y; 0, \eta) \theta(\eta) d\eta.$$

Тогда уравнение (13) примет вид:

$$u(x, y) = \Phi_0(x, y) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\theta(\eta) d\eta}{\sqrt{y-\eta}} - \int_0^y G(x, y; 0, \eta) \theta(\eta) d\eta - \int_0^y d\eta \int_0^{+\infty} \left[c(\xi, \eta) \int_0^\alpha G(s, y; \xi, \eta) ds \right] u(\xi, \eta) d\xi. \quad (14)$$

Отсюда, используя условие (4), получим:

$$\int_0^y \frac{\theta(\eta) d\eta}{\sqrt{y-\eta}} = E_1(y) + \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha} \int_0^y \theta(\eta) d\eta \int_0^\alpha G(s, y; 0, \eta) ds - \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha} \int_0^y d\eta \int_0^\alpha (\alpha-s) ds \int_0^{+\infty} G(s, y; \xi, \eta) c(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi \equiv Q(y), \quad (15)$$

где $E_1(y) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha} \left[E(y) - \int_0^\alpha \Phi_0(s, y) ds \right]$. Из условия согласования (6) имеем, что $E_1(0) = 0$. Поэтому $Q(0) = 0$. Вычислим производную:

$$Q'(y) = E_1'(y) + \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \theta(y) + \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha} \int_0^y G_s(\alpha, y; 0, \eta) \theta(\eta) d\eta + \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha} \int_0^\alpha (\alpha-s) c(s, y) u(s, y) ds - \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha} \int_0^y d\eta \int_0^{+\infty} [G(\alpha, y; \xi, \eta) - G(0, y; \xi, \eta)] c(\xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi.$$

Обращая уравнение (15), как интегральное уравнение Абеля, получим

$$\theta(y) = \theta_0(y) + \int_0^y H_1(y, \eta) \theta(\eta) d\eta + \int_0^y d\eta \int_0^\alpha H_2(y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi + \int_0^y d\eta \int_0^{+\infty} H_3(y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi, \quad (16)$$

где $H_1(y, \eta) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi(y-\eta)}} + \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_\eta^y \frac{G_s(\alpha, t; 0, \eta)}{\sqrt{y-t}} dt$, $H_2(y, \xi, \eta) = -\frac{2(\alpha-\xi)c(\xi, \eta)}{\alpha\sqrt{\pi(y-\eta)}}$,
 $H_3(y, \xi, \eta) = -\frac{2c(\xi, \eta)}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_\eta^y \frac{G(\alpha, t; \xi, \eta) - G(0, t; \xi, \eta)}{\sqrt{y-t}} dt$, $\theta_0(y) = \frac{1}{\pi} \int_\eta^y \frac{E'_1(t)}{\sqrt{y-t}} dt$.

Заметим, что

$$|H_1(y, \eta)| \leq \frac{C_1}{\sqrt{y-\eta}}, \quad |H_2(y, \xi, \eta)| \leq \frac{C_2}{\sqrt{y-\eta}},$$

$$|H_3(y, \xi, \eta)| \leq \frac{C_3}{\sqrt{y-\eta}}, \quad 0 \leq x \leq \beta, \quad \beta \gg 0, \quad |H_3(y, \xi, \eta)| \leq \frac{C_4}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{\xi^2}{4(y-\eta)}}, \quad x > \beta.$$

Обращая уравнение (16) относительно $\theta(y)$, как интегральное уравнение Вольтерра второго рода со слабой особенностью, имеем

$$\theta(y) = \theta_1(y) + \int_0^y d\eta \int_0^\alpha T_1(y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi + \int_0^y d\eta \int_0^{+\infty} T_2(y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi, \quad (17)$$

где $T_1(y; \xi, \eta) = H_2(y; \xi, \eta) + \int_\eta^y R(y, t) H_2(t; \xi, \eta) dt$,

$$T_2(y; \xi, \eta) = H_3(y; \xi, \eta) + \int_\eta^y R(y, t) H_3(t; \xi, \eta) dt, \quad \theta_1(y) = \theta_0(y) + \int_0^y R(y, t) \theta_0(t) dt.$$

Подставляя значение $\theta(y)$ из (17) в (14) получим

$$u(x, y) = \Phi_1(x, y) + \int_0^y d\eta \int_0^\alpha K_1(x, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi + \int_0^y d\eta \int_0^{+\infty} K_2(x, y; \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi, \quad (18)$$

где

$$K_1(x, y; \xi, \eta) = \int_\eta^y H(x, y; s) T_1(s; \xi, \eta) ds, \quad H(x, y; s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-s)}} - G(x, y; 0, s)$$

$$K_2(x, y; \xi, \eta) = c(\xi, \eta) \int_0^x G(s, y; \xi, \eta) ds + \int_\eta^y H(x, y; s) T_2(s; \xi, \eta) ds,$$

$$\Phi_1(x, y) = \Phi_0(x, y) + \int_0^y H(x, y; s) \theta_1(s) ds, .$$

Уравнение (18) представляет собой интегральное уравнение типа Вольтера второго рода, существование единственного решения которого доказано методом последовательных приближений.

Таким образом, имеет место

Теорема. Если выполнены условия (5) и (6), то существует единственное непрерывное и ограниченное решение задачи 1.

Литература

1. *Cannon J.R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy // *Quart. Apple. Math.* – 1963. – V. 21. – P. 155–160.
2. *Жестков С.В.* О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями // *Украинск. матем. журнал.* – 1990. – Т. 42. – № 1. – С. 132–135.
3. *Пулькина Л.С.* Смешанная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // *Матем. заметки.* – 2003. – Т. 74. – Вып. 3. – С. 435–435.
4. *Бейлина Н.В.* Нелокальная задача с интегральными уравнениями для псевдогиперболического уравнения // *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия.* – 2008. – № 2 (61). – С. 22–28.
5. *Джураев Т.Д., Попелек Я.* О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // *Дифференц. уравнения.* – 1991. – Т. 27. – № 10. – С. 1734–1745.
6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
7. *Камынин Л.И.* Метод тепловых потенциалов для параболического уравнения с разрывными коэффициентами // *Сибирский матем. журнал.* – 1963. – Т. IV. – № 5. – С. 1071–1105.