УДК 517.928 (575.2) (04)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ БИСИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.Р. Асанов, А.З. Зулпукаров, К. Алымкулов

Методом структурного сращивания К. Алымкулова строится равномерная асимптотика решения в случае, когда, соответствующее невозмущенное уравнение имеет слабую особую точку порядка две третьих.

Ключевые слова: краевая задача; метод структурного сращивания; дифференциальное уравнение.

Рассматривается краевая задача

$$y(0)=0, \quad y(1)=y^{(0)} \tag{1}$$

$$L_\varepsilon y(x) := \varepsilon y''(x) + x^{2/3} y'(x) - y(x) = f(x), \tag{2}$$

где $0<\varepsilon<<1$ — малый параметр, $f(x)\in C^{(\infty)}[0,1]$. Здесь $x\in[0,1]$ — независимая переменная и она также называется внешней переменной. $y^{(0)}$ – заданная постоянная.

Для невозмущенного уравнения ($\varepsilon=0$)

$$L_0 y_0 := x^{2/3} y_0'(x) - y_0(x) = f(x) \tag{3}$$

точка $x=0$ является слабой или интегрируемой особой точкой.

Для уравнения (3) ставим задачу Коши:

$$y_0(1)=y^{(0)}. \tag{4}$$

Решение задачи (3)–(4) представляется в виде

$$y_0(x) = p(x)\left[y^{(0)} + \int_1^x p^{-1}(s) s^{-2/3} f(s)ds \right] := a^{(0,0,0)}(\xi), \tag{5_0}$$

где $\xi = x^{1/3}$, $p(\xi)=\exp\{3\xi\}$ и $a^{(0,0,0)}(\xi)\in C^{(\infty)}[0,1]$.

1. Внешнее решение задачи (1)–(2), удовлетворяющее начальному условию $y(1)=y^{(0)}$, ищется в виде

$$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots , \tag{6}$$

где $y_k(x)$ — пока неизвестные функции. Для определения этих функций получим уравнения:

$$Ly_1 = -y_0''(x), \quad y_1(0)=0, \tag{7.1}$$

$$Ly_2 = -y_1''(x), \quad y_2(0)=0, \tag{7.2}$$

. . . .

$$Ly_n = -y_{n-1}''(x), \quad y_n(0)=0, \ \dots . \tag{7.n}$$

Дважды дифференцируя $y_0(x)$ уравнения (7.1) запишем в виде

$$Ly_1(x) = x^{-5/3} a_0(\xi), \quad y_1(0)=0,$$

где $a_0(\xi)\in C^{(\infty)}[0,1]$. Отсюда, имеем

$$y_1(x) = p(\xi)\int_1^x s^{-7/3} p^{-1}(s^{1/3}) a_0(s^{1/3}) ds .$$

Выделяя главную часть интеграла в смысле Адамара [3], его можно представить в виде

$$y_1(x) = x^{-4/3}\left[a^{(1,0,0)}(\xi) + \xi^4 \ln x a^{(1,4,1)}(\xi) \right], \tag{5.1}$$

где $a^{(1,0,0)}(\xi), a^{(1,4,1)}(\xi) \in C^{(\infty)}[0,1]$.

Методом полной математической индукции легко показывается, что

$$y_n(x) = x^{-\frac{4+5(n-1)}{3}}\left[a^{(n,0,0)}(\xi)\right] + \xi^5 \ln x a^{(n,5,1)}(\xi) + (\xi^5 \ln x)^2 a^{(n,10,2)}(\xi) + \ldots + \\ +(\xi^5 \ln x)^{n-1} a^{(n,5(n-1),n-1)}(\xi) + \xi^{4+5(n-1)} \ln^n x a^{(n,4+5(n-1),n)}(\xi)], n \in N. \tag{5.n}$$

Отметим, что в обозначении $a^{(i,j,k)}(\xi)$ первый индекс i – указывает номер приближений у функции $y_n(x)$, второй индекс j – степень ξ, а последний индекс степень $\ln x$. Все функции $y_k(x)$ определяются единственным образом. Поэтому структурное представление ряда (6) можно записать в виде:

$$y(x,\varepsilon) = a^{(0,0,0)}(\xi) + \varepsilon x^{-4/3}\{a^{(1,0,0)}(\xi) + \xi^4 \ln x a^{(1,4,1)}(\xi) + \varepsilon\xi^{-5}[a^{(2,0,0)}(\xi) + \\ +\xi^5 \ln x a^{(2,5,1)}(\xi) + \xi^9 \ln^2 x a^{(2,9,2)}(\xi)] + (\varepsilon\xi^{-5})^2[a^{(3,0,0)}(\xi) + \xi^5 \ln x a^{(3,5,1)}(\xi) + \\ +(\xi^5 \ln x)^2 a^{(3,10,2)}(\xi) + \xi^{14} \ln^3 x a^{(3,14,3)}(\xi)] + (\varepsilon\xi^{-5})^3[a^{(4,0,0)}(\xi) + \xi^5 \ln x a^{(4,5,1)}(\xi) + \\ +(\xi^5 \ln x)^2 a^{(4,10,2)}(\xi) + (\xi^5 \ln x)^3 a^{(4,15,3)}(\xi) + \xi^{19} \ln^4 x a^{(4,19,4)}(\xi)] + \ldots + \\ +(\varepsilon\xi^{-5})^{n-1}[a^{n,0,0)}(\xi) + \xi^5 \ln x a^{(n,5,1)}(\xi) + (\xi^5 \ln x)^2 a^{(n,10,2)}(\xi) + \ldots + \\ +(\xi^5 \ln x)^{n-1} a^{(n,(n-1)5,n-1)}(\xi) + \xi^{(4+5(n-1))} \ln^n x a^{(n,4+5(n-1),n)}(\xi)] + \ldots\}, \xi = x^{1/3}. \tag{6.0}$$

Из (6.0) легко видеть, что этот ряд является асимптотическим рядом на отрезке $\omega(\varepsilon) = [\varepsilon^\beta, 1], 0 < \beta < 3/5$. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Внешняя задача для краевой задачи (1)–(2) имеет единственное асимптотическое решение, представимое в виде

$$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \ldots + \varepsilon^n y_n(x) + \bar{R}_{n+1}(x,\varepsilon), \tag{7}$$

на отрезке $[\varepsilon^\beta, 1], 0 < \beta < 3/5$, где

$$|\bar{R}_{n+1}(x,\varepsilon)| \le 2M\varepsilon^{n+1}\varepsilon^{-(5n+4)\beta/3} = 2M\varepsilon^{\beta/3} \cdot \varepsilon^{(5/3)(n+1)\alpha}. \tag{8}$$

Причем $\alpha + \beta = 3/5$.

Теперь построим внутреннее решение задачи (1)–(2). Для этого сделаем подстановку

$$x = \mu^3 t, \quad \mu^5 = \varepsilon, \tag{9}$$

тогда задача (1)–(2) имеет вид

$$u''(t) + t^{2/3}u'(t) = \mu[u(t) + f(\mu^3 t)], \quad u(0) = 0, \tag{10}$$

где $u(t) = y(x) | (x = \mu^3 t)$.

Решение задачи (10) нам надо сращивать с внешним решением (6.0), для этого надо внешнее решение выразить через внутреннюю переменную *t*.

$$y(x,\varepsilon) | (x = \mu^3 t, \varepsilon = \mu^5, \zeta := t^{1/3}) = a_0^{(0,0,0)} + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s V_s(\zeta, x), \tag{11}$$

где $V_s(\zeta, x)$ – определенные функции.

Отметим, этот ряд имеет асимптотический характер на отрезке $\omega(\mu) = [\varepsilon^{\beta-3/5}, \varepsilon^{\alpha-3/5}], 0 < \alpha < \beta < 3/5$. На отрезке изменения *t* (можно считать, что $t \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$).

Решение задачи (11) ищем в виде ряда

$$u(t,\mu) = u_0(t) + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t) + \mu^3 u_3(t) + \ldots \tag{12}$$

Подставляя (12) в (10) для определения $u_j(t)$ $(j = 0,1,2,\ldots)$ имеем задачи:

$$Mu_0 := u_0''(t) + t^{2/3}u_0'(t) = 0, \quad u_0(0) = 0, \tag{13.0}$$

$$Mu_1 = u_0(t) + f_0, \quad u_1(0) = 0, \tag{13.1}$$

$$Mu_2 = u_1(t), \quad u_2(0) = 0, \tag{13.2}$$

$$Mu_3 = u_2(t), \quad u_3(0) = 0, \tag{13.3}$$

$$Mu_4 = u_3 + f_1 t, \quad u_4(0) = 0, \tag{13.4}$$

. . . .

Далее используя следущие леммы, сращиваем внешние и внутренние решения.

Лемма 1. Однородное уравнение

$$Mz := z''(t) + t^{2/3} z' = 0$$

имеет два линейно независимых решения вида

$$z_1(t) = 1, \quad X(t) = \int_0^t \exp\{-3s^{5/3}/5\} ds = \begin{cases} t + O(t^{8/3}), & t \to 0, \\ A_0 + O(t^{-2/3} \exp\{-3t^{5/3}/5\}), & t \to \infty, \end{cases}$$

$$A_0 = \int_0^\infty \exp\{-3s^{5/3}/5\} ds .$$

Лемма 2. Общее решение неоднородного уравнения

$$Mz = g(t) ,$$

где $g(t) \in C^\infty[0, 1/\mu^3]$ представляется в виде

$$z(t) = a + bX(t) + T[g] ,$$

где a, b – произвольные постоянные; $T[g]$ – частное решение представимое в виде

$$T[g] := \int_0^t X(t) e^{3s^{5/3}/5} g(s) ds - \int_0^t e^{3s^{5/3}/5} X(s) g(s) ds . \tag{14}$$

Тогда получаем следующую теорему.

Теорема 2. Внутреннее решение задачи (2) с начальным условием $y(0)$ имеет единственное асимптотическое решение на отрезке $x \in [0, \varepsilon^\alpha]$ или $t \in [0, \varepsilon^{\alpha - 3/5}]$ и оно представляется в виде асимптотического ряда (12), которое при $t \in [\varepsilon^{\beta - 3/5}, \varepsilon^{\alpha - 3/5}]$ имеет вид (11).

$$U(t, \mu) = a^{(0,0,0)} + \sum_{k=1}^{5n} \mu^k V_k(t, x) + R_{5n+1}(t, \mu) ,$$

где $| R_{5n+1}(t, \mu) | \le M(\mu\zeta)^{5n+1} = Mx^{(5n+1)/3} = M\varepsilon^{(5n+1)\alpha/3}$.

Теперь составим равномерное приближение задачи (1)–(2)

$$Y(x, \varepsilon) = Y_n(x, \varepsilon) + U_{5n}(t, \mu) - V_{5n}(t, \mu) ,$$

где $Y_n(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + ... + \varepsilon^n y_n(x), \quad U_{5n}(t, \mu) = a^{(0,0,0)} + \sum_{k=1}^{5n} u_k(t, \mu),$

$$V_{5n}(t, \mu) = a_0^{(0,0,0)} + \sum_{k=1}^{5n} \mu^k V_k(t, x) .$$

Из теоремы 1 и 2 вытекает следующая

Теорема 3. Выражение $Y(x, \varepsilon)$ является равномерным приближением задачи (1)–(2) и имеет место оценка

$$| y(x, \varepsilon) - Y(x, \varepsilon) | \le M\varepsilon^{(5n+1)\alpha/3}, \quad \forall x \in [0, 1] .$$

Литература

1. *Алымкулов К., Зулпукаров А.З.* Равномерная асимптотика решения краевой задачи сингулярно возмущенного уравнения второго порядка со слабой особенностью // Доклады РАН. – 2004. – Т. 398. – №5. – С. 1–4.
2. *Зулпукаров А.З.* Метод структурного сращивания для решения краевых задач сингулярно возмущенных уравнений второго порядка с особыми точками: Автореф. канд. дисс. – Ош, 2009.
3. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М.: Наука, 1975. – 48 с.