УДК 517 (575.2) (04)

РАЗВИТИЕ НОВОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Б. Урдалетова, С.К. Кыдыралиев

Если при решении систем линейных дифференциальных уравнений воспользоваться корнями характеристического уравнения, используемыми в методе Эйлера, то процесс нахождения интегрируемых комбинаций, соответствующих методу Даламбера, становится очень простым. В результате возникает эффект синергии – получается более простой, и в то же время, более эффективный метод. В работе демонстрируется этот объединенный метод.

Ключевые слова: системы линейных дифференциальных уравнений; метод Эйлера; метод Даламбера; объединенный метод.

Новый метод решения систем линейных дифференциальных уравнений, объединяющий элементы метода Эйлера и метода Даламбера, был представлен в работе [1]. В данной статье развиваются изложенные там идеи.

Пример 1

Сто единиц вещества **A** разлагаются на два вещества **Y** и **Z** со скоростью образования каждого из них, пропорциональной количеству неразложившегося вещества. Требуется найти закон изменения количеств **y** и **z** веществ **Y** и **Z** в зависимости от времени **t**, если при t = 0 имеем:

$y = z = 0$, *а через час* $y = 10$, $z = 40$.

В момент времени t количество неразложившегося вещества A будет равно $100 - y - z$. Поэтому, в силу условия задачи

$$\begin{cases} y' = k(100 - y - z), \\ z' = m(100 - y - z). \end{cases} \qquad (1)$$

Умножим 1-ое уравнение системы (1) на m, вычтем из него 2-ое, умноженное на k, и получим $my' = kz'$. Проинтегрировав, получим $my = kz + C$.

Так как $y(0) = z(0) = 0$, получаем, что $C = 0$ и, следовательно, $y = kz/m$.

Подставив найденное выражение в 2-ое уравнение системы (1), получим уравнение $z' = 100m - (k + m)z$. Переписав его, как линейное уравнение: $z' + (k + m)z = 100m$, проинтегрируем, и получим общее решение

$z = 100m/(k + m) + Ce^{-(k + m)t}$.

Из начального условия $z(0) = 0$ следует, что $C = -100m/(k + m)$ и, как следствие

$$z = \{100m/(k + m)\}[1 - e^{-(k + m)t}]. \qquad (2)$$

Тогда, из равенства $y = kz/m$ получаем, что

$$y = \{100k/(k + m)\}[1 - e^{-(k + m)t}]. \qquad (3)$$

Для того чтобы определить значения k и m, воспользуемся условиями

$y(1) = 10, z(1) = 40.$

Тогда, $10 = \{100k/(k + m)\}[1 - e^{-(k + m)}]$ и $40 = \{100m/(k + m)\}[1 - e^{-(k + m)}]$.

Разделив 2-ое равенство на 1-ое, получим, что $m = 4k$. Тогда, 2-ое равенство можно записать в виде $40 = \{400k/(k + 4k)\}[1 - e^{-(k + m)}]$.

Отсюда, $e^{-(k + m)} = 0,5$.

Подставив в (2) и (3) $m = 4k$ и $e^{-(k + m)} = 0,5$, получим ответ:

$y = 20[1 - 0,5^t]$ и $z = 80[1 - 0,5^t]$.

Метод, которым была решена эта задача, это метод нахождения интегрируемых комбинаций, и автором его является Жан Лерон Даламбер (1717–1783). Как видно из процесса решения задачи, это очень эффективный метод, но, к сожалению, интегрируемые комбинации не всегда можно сразу определить.

Поэтому, в курсах дифференциальных уравнений, основное внимание уделяется методу, автором которого является великий математик Леонард Эйлер (1707–1783).

Пример 2

Для того чтобы решить систему уравнений с соответствующими начальными условиями

$$\begin{cases} u' = 3u - v + w - 4e^{2x}, \quad u(0) = 2, \\ v' = -u + 5v - w + 3e^{3x}, \quad v(0) = 5, \\ w' = u - v + 3w + 36e^{6x}, \quad w(0) = 11 \end{cases} \tag{4}$$

методом Эйлера, вначале находят корни характеристического уравнения системы (4):

$$\begin{vmatrix} 3-k & -1 & 1 \\ -1 & 5-k & -1 \\ 1 & -1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$=> k^3 - 11k^2 + 36k - 36 = 0 => k_1 = 2; k_2 = 3; k_3 = 6.$

Далее, исходя из вида полученных корней, опираясь на результаты солидных теоретических выкладок, выписывают общее решение однородной системы. Затем, для решения неоднородной системы используют метод неопределенных коэффициентов или метод вариации. И, наконец, используя начальные условия, находят решение задачи.

Оказывается, если воспользоваться корнями характеристического уравнения, используемых в методе Эйлера, то процесс нахождения интегрируемых комбинаций, соответствующих методу Даламбера, становится очень простым. В результате возникает эффект синергии – получается более простой, и в то же время более эффективный метод.

Далее будем демонстрировать этот объединенный метод.

Используем корень характеристического уравнения $k_1 = 2$ для того чтобы переписать систему (4) в виде

$$\begin{cases} u' - 2u = u - v + w - 4e^{2x}, \\ v' - 2v = -u + 3v - w + 3e^{3x}, \\ w' - 2w = u - v + w + 36e^{6x}. \end{cases} \tag{5}$$

Вычтем из первого уравнения системы (5) третье, и получим:

$$(u - w)' - 2(u - w) = -4e^{2x} - 36e^{6x}.$$

Решив это уравнение как линейное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $u - w$, получим:

$$u - w = -4xe^{2x} - 9e^{6x} + C_1e^{2x}. \tag{6}$$

Для того чтобы определить значение C_1, воспользуемся начальным условием

$u(0) - w(0) = 2 - 11 = -9.$

Тогда, из (3): $-9 = 0 - 9 + C_1$ и, соответственно, $C_1 = 0.$

Таким образом, мы получили первую комбинацию решений:

$u - w = -4xe^{2x} - 9e^{6x}.$

Повторим процедуру, взяв второй корень характеристического уравнения $k_2 = 3$:

$$\begin{cases} u' - 3u = -v + w - 4e^{2x}, \\ v' - 3v = -u + 2v - w + 3e^{3x}, \\ w' - 3w = u - v + 36e^{6x}. \end{cases} \tag{7}$$

Сложив уравнения системы (7), получим

$$(u+v+w)'-3\left(u+v+w\right)=-4e^{2x}+3e^{3x}+36e^{6x}.$$

Решение этого уравнения, при начальном условии $u(0) + v(0) + w(0) = 18,$ даст вторую комбинацию решений:

$u + v + w = 4e^{2x} + 3xe^{3x} + 12e^{6x} + 2e^{3x}.$

Третий корень характеристического уравнения $k_3 = 6$ позволяет переписать систему (1) в виде

$$\begin{cases} u'-6u=-3u-v+w-4e^{2x}, \\ v'-6v=-u-v-w+3e^{3x}, \\ w'-6w=u-v-3w+36e^{6x}. \end{cases} \qquad (8)$$

Так как 6 является корнем характеристического уравнения, из теории определителей известно, что некая линейная комбинация правых частей уравнений системы (5) будет равна нулю. В данном случае эта комбинация получится, если из суммы первого и третьего уравнений системы (8) отнять удвоенное второе.

В итоге, получится уравнение

$$(u-2v+w)'-6\left(u-2v+w\right)=-4e^{2x}-6e^{3x}+36e^{6x}.$$

Его решение есть третья комбинация решений:

$u - 2v + w = e^{2x} + 2e^{3x} + 36xe^{6x} + C_3e^{6x}.$

Воспользовавшись начальным условием $u(0) - 2v(0) + w(0) = 3,$

получим, что: $3 = 1 + 2 + C_3$ и, как следствие, $C_3 = 0.$

Для того чтобы закончить решение системы (4) осталось воспользоваться найденными комбинациями решений и определить $u,$ v и w ─ решить алгебраическую систему:

$$\begin{cases} u-w=-x4e^{2x}-9e^{6x}, \\ u+v+w=4e^{2x}+3xe^{3x}+12e^{6x}+2e^{3x}, \\ u-2v+w=e^{2x}+2e^{3x}+36xe^{6x}. \end{cases} \qquad (9)$$

Вычтем из второго уравнения системы (9) третье, и разделив результат на 3, получим функцию v:

$v = e^{2x} + xe^{3x} + (4 - 12x)e^{6x}$.

Далее, сложим первое и второе уравнение системы (9), и подставив в результат значение функции v, получим

$2u = (3 - 4x)e^{2x} + 2(x + 1)e^{3x} + (12x - 1)e^{6x}$.

Отсюда, $u = (1,5 - 2x)e^{2x} + (x + 1)e^{3x} + (6x - 0,5)e^{6x}$.

И на последнем шаге, подставив значение u в первое уравнение системы (9) получим

$w = (1,5 + 2x)e^{2x} + (x + 1)e^{3x} + (6x + 8,5)e^{6x}$.

Пример 3. Решим начальную задачу (задачу Коши):

$$\begin{cases} u'=3u+v+w+3e^{2x}x^{-0,5}, \quad u(0)=1, \\ v'=-2u-2w+2009\cdot 2010e^{2x}x^{2008}, \quad v(0)=2, \\ w'=u+v+3w+e^{3x}, \quad w(0)=3. \end{cases} \qquad (10)$$

Вначале составим и решим характеристическое уравнение системы (10):

$$\begin{vmatrix} 3-k & 1 & 1 \\ -2 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$=> -k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 0 => k_1 = k_2 = k_3 = 2.$

Используем корень характеристического уравнения $k_1 = 2$ для того чтобы переписать систему (10) в виде

$$\begin{cases} u' - 2u = u + v + w + 3e^{2x}x^{-0,5}, \\ v' - 2v = -2u - 2v - 2w + 2009 \cdot 2010e^{2x}x^{2008}, \\ w' - 2w = u + v + w + e^{3x}. \end{cases} \tag{11}$$

Сложив все уравнения системы (11), получим:

$$(u + v + w)' - 2\left(u + v + w\right) = 3e^{2x}x^{-0,5} + 2009 \cdot 2010e^{2x}x^{2008} + e^{3x}.$$

Решение этого уравнения легко получить, переписав его в виде

$$\left\{\left(u + v + w\right)e^{-2x}\right\}' e^{2x} = 3e^{2x}x^{-0,5} + 2009 \cdot 2010e^{2x}x^{2008} + e^{3x}. \tag{12}$$

Проинтегрировав уравнение (12) при начальном условии $u(0) + v(0) + w(0) = 6$, получим комбинацию решений системы (10):

$u + v + w = 6x^{0,5}e^{2x} + 2010x^{2009}e^{2x} + e^{3x} + 5e^{2x}$.

Функция $u + v + w$ содержится в правой части каждого из уравнений системы (11). Поэтому, подставив ее значение, получим три линейных дифференциальных уравнения 1-го порядка:

$$\begin{cases} u' - 2u = 6e^{2x}x^{0,5} + 2010e^{2x}x^{2009} + e^{3x} + 5e^{2x} + 3e^{2x}x^{-0,5}, \\ v' - 2v = -2\left(6e^{2x}x^{0,5} + 2010e^{2x}x^{2009} + e^{3x} + 5e^{2x}\right) + 2009 \cdot 2010e^{2x}x^{2008}, \\ w' - 2w = 6e^{2x}x^{0,5} + 2010e^{2x}x^{2009} + e^{3x} + 5e^{2x} + e^{3x}. \end{cases}$$

Проинтегрируем их и получим решение системы задачи (10):

$$\begin{cases} u = [4x^{1,5} + x^{2010} + e^{x} + 5x + 6x^{0,5}]e^{2x}, \\ v = [-8x^{1,5} - 2x^{2010} - 2e^{x} - 10x + 2010x^{2009} + 4]e^{2x}, \\ w = [4x^{1,5} + x^{2010} + 2e^{x} + 5x + 1]e^{2x}. \end{cases}$$

Замечание. Следует отметить, что решение задачи (6) традиционными методами затруднительно, так как вид свободных членов первого и второго уравнений системы не позволяет воспользоваться методом неопределенных коэффициентов, а кратные корни характеристического уравнения делают решение методом вариации произвольных постоянных весьма громоздким.

Литература

1. *Кыдыралиев С.К., Урдалетова А.Б.* Новый метод для решения систем линейных дифференцированных уравнений // Актуальные проблемы теории управления: Матер. межд. научн. конф. – Бишкек: КРСУ, 2008. – С. 160–165.
2. *Kydyraliev S.K., Urdaletova A.B.* Solving Linear Differential Equations by Operator Factorization // The College Mathematics Journal, USA. – 1996. – Vol. 27. – No. 3.
3. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Высшая школа, 1978. – 287 с.
4. *Guterman M.M. and Nitecki Z.H.* Differential Equations. A Fist Course*,* Saunders College Publishing. – Philadelphia, 1988.