

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СКАЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

Г.С. Ободова

Рассматривается скалярное интегральное уравнение Вольтерра первого рода. Построены Вольтерровые регуляризирующие операторы и доказаны теоремы единственности в различных пространствах.

Ключевые слова: интегральное уравнение первого рода; регуляризирующие операторы; единственность решения.

Рассмотрим уравнение

$$\int_t^b K(t,s)U(s)ds = f(t), t \in [a,b], a < b, \quad (1)$$

где $K(t,s)$ и $f(t)$ — заданные функции.

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать уравнение

$$\varepsilon \vartheta(t, \varepsilon) + \int_t^b K(t, s) \vartheta(s, \varepsilon) ds = f(t), t \in [a, b], \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр.

В [1] предложен метод регуляризации для интегральных уравнений первого ряда. Интегральные уравнение типа (1) и (2) исследовались в [2]. В указанных работах рассматривались уравнения с переменным верхним пределом. В настоящей работе для уравнения (1) построены вольтерровые регуляризирующие операторы, доказаны теоремы единственности.

Предположим, что

а) при любом фиксированном $t \in [a, b]$ $K(t, s) \in L^{q_1}(t, b)$, $q_1 \geq 1$ функция $K(t, s) \in L^1(a, b)$ и $K(t, t) \geq 0, t \in [a, b]$;

б) при $\tau > \eta$ для любых $(\tau, s), (\eta, s) \in C_1 = \{(s, t) : a < t < s < b\}$ справедлива оценка

$$|K(\tau, s) - K(\eta, s)| \leq l(s) \int |K(s, s)| ds,$$

где $l(t) \geq 0$ при $t \in [a, b]$ и $l(t) L^{q_1}(a, b), q_1 \geq 1$.

Будем обозначать $C_\varphi^\gamma[a, b], 0 < \gamma \leq 1$, линейное пространство всех функций $U(t)$, определенных на $[a, b]$ и удовлетворяющие условию $|U(s) - U(t)| \leq C |\varphi(s) - \varphi(t)|^\gamma, \varphi(t) = \int_t^b |K(s, s)| ds$, где C – положительная постоянная, зависящая от $U(t)$, но не от t и s . $C_\varphi^\gamma[a, b]$ является банаховым пространством с нормой

$$\|U(t)\|_\gamma = \sup |U(t)| + \sup |U(s) - U(t)| / |\varphi(s) - \varphi(t)|^\gamma;$$

пространство непрерывных функций с нормой $\|U(t)\|_C = \max \|U(t)\|, t \in [a, b]$.

Лемма 1. Пусть

$$\vartheta(t, \varepsilon) = U(t)^{-\frac{1}{\varepsilon} \varphi(t)} + \frac{1}{\varepsilon} \int_t^b K(s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} [\varphi(s) - \varphi(t)]} [U(s) - U(t)] ds, \varepsilon > 0. \quad (3)$$

Тогда если $U(t) \in C[a, b], U(b) = 0, K(t) \in L^1(a, b), K(t) > 0$ при почти всех $t \in [a, b]$ и $\varphi(t) = \int_t^b K(s) ds, t \in [a, b]$, то на сегменте $[a, b]$ справедлива оценка

$$\|\vartheta(t, \varepsilon)\| \leq \omega_{\bar{v}}(\varepsilon^\beta) 3 \|U(t)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^\beta}}, \quad (4)$$

где β произвольное число из интервала $(0, 1)$

$$\omega_{\bar{v}}(\delta) = \sup |(\varphi^{-1}(x)) - U(\varphi^{-1}(v))|$$

$\varphi^{-1}(x)$ – обратная функция к функции $\varphi(t)$;

если $U(t) \in C_\varphi^\gamma[a, b], 0 < \gamma \leq 1, U(b) = 0, K(t) \in L^1(a, b)$

$K(t) \geq 0$ при $t \in [a, b], \varphi(t) = \int_t^b K(s) ds, t \in [a, b]$, то

$$\|\vartheta(t, \varepsilon)\|_C \leq N C \varepsilon^\gamma, \quad (5)$$

где $N = \sup_{t, s \in [a, b]} |U(s) - U(t)| / |\varphi(s) - \varphi(t)|^\gamma, C = \gamma \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{\gamma-1} d\tau$.

Доказательство. Пусть $a \leq t \leq \varphi^{-1}(\varepsilon^\beta)$, $0 < \beta < 1$.

Тогда

$$\left| \mathcal{G}(t, \varepsilon) \leq \omega_{\bar{U}}(\varepsilon^\beta) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \varphi(t)} + \omega_{\bar{U}}(\varepsilon^\beta) \int_t^b \frac{1}{\varepsilon} K(s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^s K(s) ds} ds \leq \omega_{\bar{U}}(\varepsilon^\beta). \right. \quad (6)$$

Если $\varphi^{-1}(\varepsilon^\beta) \leq t \leq b$, то

$$\left| U(t) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \varphi(t)} \right| \leq \|U(t)\|_C e^{-\frac{1}{1-\beta}}, \quad (7)$$

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^\beta)} K(s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^s K(\tau) d\tau} [U(s) - U(t)] ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^\beta)}^b K(s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^s K(\tau) d\tau} [U(s) - U(t)] ds \leq \right. \quad (8)$$

$$\leq \omega_{\bar{U}}(\varepsilon^\beta) + 2 \|u(t)\|_C e^{-\frac{1}{1-\beta}}.$$

Учитывая (6), (7), (8) из (3) получаем оценку (4).

Если $U(t) \in C_\sigma^\gamma[a, b]$, то

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{G}(t, \varepsilon) \right| &\leq N (\varphi(t))^\gamma e^{-\frac{1}{\varepsilon} \varphi(t)} + \frac{N}{\varepsilon} \int_t^b e^{-\frac{1}{\varepsilon} [\varphi(s) - \varphi(t)]} K(s) [\varphi(s) - \varphi(t)]^\gamma ds = \\ &= N \int_t^b e^{-\frac{1}{\varepsilon} [\varphi(s) - \varphi(t)]} K(s) \gamma [\varphi(s) - \varphi(t)]^{\gamma-1} ds = N \gamma \int_0^{\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}} e^{-\tau} \tau^{\gamma-1} d\tau \varepsilon^\gamma \leq N C \varepsilon^\gamma. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение (2)

$$\mathcal{G}(t, s) + \frac{1}{\varepsilon} \int_t^b K(s, s) \mathcal{G}(s, \varepsilon) ds = -\frac{1}{\varepsilon} \int_t^b [K(t, s) - K(s, s)] \mathcal{G}(s, \varepsilon) ds + \frac{f(t)}{\varepsilon}$$

отсюда, используя резольвенту ядра $\left[-\frac{K(s, s)}{\varepsilon} \right]$, имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t, s) &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_t^b [K(t, s) - K(s, s)] \mathcal{G}(s, \varepsilon) ds + \frac{f(t)}{\varepsilon} + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_t^b K(s, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^s K(\tau, \tau) d\tau} \left\{ -f(s) + \int_t^b [K(s, \tau) - K(\tau, \tau)] \mathcal{G}(\tau, \varepsilon) d\tau \right\} ds. \end{aligned}$$

Далее, после применения формулы Дирихле, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t, \varepsilon) &= \int_t^b H(t, s, \varepsilon) \mathcal{G}(s, \varepsilon) ds + \frac{1}{\varepsilon} f(t) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^b K(\tau, \tau) d\tau} + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_t^b K(s, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^s K(\tau, \tau) d\tau} [f(s) - f(t)] ds, \end{aligned} \quad (9)$$

где $H(t, s, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} [K(t, s) - K(s, s)] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^s K(\tau, \tau) d\tau} -$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2} \int_t^b K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^s K(\tau, \tau) d\tau} [K(t, s) - K(\tau, s)]. \quad (10)$$

Уравнения (2) и (9) эквивалентны. Учитывая условия а) и б) из (10) имеем:

$$\left| H(t, s, \varepsilon) \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} l(s) \int_t^s \left| K(v, v) dv \right| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^s K(\tau, \tau) d\tau} + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_t^s K(\tau, \tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^\tau K(v, v) dv} \int_t^\tau K(v, v) dv d\tau \leq l(s). \quad (11)$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия а) и б). Тогда если $K(t, t) > 0$ при почти всех $t \in [a, b]$, уравнение (1) имеет решение $U(t) \in C[a, b]$ и $U(b) = 0$, то решение уравнения (2) при $\varepsilon > 0$ сходится по норме $C[a, b]$ к $U(t)$.

При этом справедлива оценка

$$\| \mathcal{G}(t, \varepsilon) - U(t) \|_C \leq 3M \| U(t) \|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-\beta}}} + M \omega_4 - (\varepsilon^\beta), \quad (12)$$

где β – произвольное число из $(0, 1)$,

$$\omega_U(\delta) = \sup_{|x-v| \leq \delta} |U(\varphi^{-1}(x)) - U(\varphi^{-1}(v))|, \varphi(t) = \int_t^b K(s, s) ds;$$

$\varphi^{-1}(x)$ – обратная функция к функции $\varphi(t)$,

$$M = \exp \left[\int_a^b l(s) ds \right];$$

если $K(t, t) \geq 0$ при $t \in [a, b]$, уравнение (1) имеет решение $U(t) \in C_\gamma^\gamma[a, b], 0 < \gamma \leq 1$,

$\varphi(t) = \int_t^b K(s, s) ds, U(b) = 0$, то решение $\mathcal{G}(t, \varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится по норме $C[a, b]$ к $U(t)$. При этом справедлива оценка

$$\| \mathcal{G}(t, \varepsilon) - U(t) \|_C \leq B \varepsilon^\gamma, \quad (13)$$

где $B = TC \exp \left[\int_a^b l(s) ds \right], C = \gamma \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{\gamma-1} d\tau, T = \sup_{t, s \in [a, b]} |U(t) - U(s)| / |\varphi(t) - \varphi(s)|^\gamma$.

Доказательство. В уравнении (2) сделаем замену

$$\mathcal{G}(t, \varepsilon) = U(t) + \xi(t, \varepsilon). \quad (14)$$

где $U(t)$ – решение уравнения (1). Подставляя (14) в (2), имеем:

$$\varepsilon \xi(t, \varepsilon) + \int_t^b K(t, s) \xi(s, \varepsilon) ds = -\varepsilon U(t). \quad (15)$$

Сравнивая эквивалентные уравнения (2) и (9), уравнение (15) сводим к эквивалентному уравнению

$$\xi(t, \varepsilon) = \int_t^b K(t, s, \varepsilon) \xi(s, \varepsilon) ds + \varphi(t, \varepsilon), \quad (16)$$

где

$$\varphi(t, \varepsilon) = U(t) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^b K(\tau, \tau) d\tau} + \frac{1}{\varepsilon} \int_t^b K(s, s) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^s K(\tau, \tau) d\tau} [U(t) - U(s)] ds. \quad (17)$$

Учитывая оценку (11) из (15) имеем:

$$|\xi(t, \varepsilon)| \leq \int_t^b L(s) |\xi(s, \varepsilon)| ds + |\varphi(t, \varepsilon)|, t \in [a, b]. \quad (18)$$

В случае 1) из (18) в силу неравенства Гронуолла–Беллмана, в силу (17) и в силу леммы 1 имеем оценку (13).

Следствие 1. Если выполняются условия а), б) и $K(t, t) > 0$ при почти всех $t \in [a, b]$, то решение уравнения (1) в пространстве $C[a, b]$ единственно.

Доказательство. Пусть $U(t)$ – ненулевое непрерывные на $[t_0, T]$ решение уравнения (1) при $f(t) \equiv 0$. Тогда

$$\left| \int_t^b K(s, s) U(s) ds \right| \leq \int_t^b |K(t, s) - K(s, s)| |U(s)| ds.$$

Отсюда, по условию и в силу теоремы о среднем, имеем:

$$|U(t)^*| \leq \int_t^b l(s) |U(s)| ds, t^* \in [t, b].$$

Теперь переходя к пределу при $b \rightarrow t$, получим $U(b) = 0$. Тогда из оценки (12) вытекает

$$\|U(t)\|_C \leq 2M\omega_{\bar{t}} - (\varepsilon^\beta),$$

где $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, ε_0 – достаточное малое фиксированное число. Следовательно, $\|U(t)\|_C = 0$, т.е. $U(t) = 0$ при $t \in [a, b]$.

Следствие 2. Если выполняются условия а), б) и существует число $t_1 \in (a, b)$ такое, что $K(t, t) > 0$ при почти всех $t \in (a, t_1)$, то решение уравнения (1) единственно в пространстве

$$C_\varphi^\gamma[a, b], 0 < \gamma \leq 1, \varphi(t) = \int_t^b K(s, s) ds.$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

Литература

1. Асанов А. Регуляризация и единственность решений уравнений Вольтерра первого рода: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 1982.
2. Демидович В.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.
3. Иманалиев М.И., Асанов А. Регуляризация единственных и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Исследования по интегро-дифференц. уравнениям. Вып. 21. – Бишкек: Илим, 1988.