УДК 517.9 (575.2) (04)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ИМПУЛЬСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

К.К. Какишов, Ж.К. Какишов

Строится асимптотическая формула для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в случаях, когда заданные функции в правой части являются негладкими.

Ключевые слова: импульсная функция; функция Дирака; функция пограничного слоя; кусочно-регулярная функция; асимптотика решений.

Рассмотрим

$$y'(x) = f(x, y(x), z(x)), \quad (0 \le x \le 1),$$

$$\varepsilon z'(x) = g_0(x, y(x), z(x)) + \sum_{K=1}^{N} \theta(p_k) g_k(x, y(x), z(x)) + \varepsilon \sum_{K=1}^{N} A_k \delta(p_k), \tag{1}$$

$$y(0) = b_1, \quad z(0) = b_2, \tag{2}$$

$0 < \varepsilon << 1$, $b_1, b_2 -$ известные постоянные, $A_k -$ неизвестные постоянные;

$p_k = x - x_k$; x_k – точки разрыва, причем $o < x_1 < x_2 < ... < x_N < 1$, $f(x,y,z)$, $g_k(x,y,z)$, $(k=\overline{0,N})$ непрерывно-дифференцируемые функции по своим аргументам; $\theta(p_k)$ – ступенчатая функция Хевисайда:

$\theta(p_k) = \begin{cases} 0(x \le x_k), \\ 1(x > x_k), \end{cases}$ $\theta'(p_k) = \delta(p_k)$ – функция импульс Дирака.

По правилам обобщенного дифференцирования кусочно-регулярных функций, получаем

$$z' = [z'] + \sum_{k=1}^{N} [z(x_k+0) - z(x_k-0)]\delta(P_k) \tag{3}$$

где z' обозначена обобщенная производная, а через $[z']$ – обычная производная, определенная для любого $x \ne x_k$. Так как

$$y'(x) = f(x,y,z),$$

$$\varepsilon[z'] = g_0(x,y,z) + \sum_{K=1}^{N} \theta(p_k) g_k(x,y,z), \tag{4}$$

при $x = x_k$

$$y'(x) = f(x,y,z),$$

$$\varepsilon z' + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} [z(x_k+0) - z(x_k-0)]\delta(P_k) = g_0(x,y,z) + \sum_{k=1}^{N} \theta(P_k) g_k(x,y,z) + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} A_k \delta(P_k). \tag{4$_0$}$$

Определим неизвестные постоянные:

$$A_k = z(x_k+0) - z(x_k-0), \ (k=\overline{1,N}). \tag{4$_к$}$$

Тогда уравнение (4) запишется в виде:

$$y'(x) = f(x,y,z),$$

$$\varepsilon z' = g_0(x,y,z) + \sum_{K=1}^{N} \theta(p_k) g_k(x,y,z). \tag{5}$$

Решение уравнения (5) ищем в классе кусочно-гладких функций подстановкой:

$$y(x) = Y_0(x) + \sum_{K=1}^{N} \theta(p_k) Y_k(x),$$

$$z(x) = Z_0(x) + \sum_{K=1}^{N} \theta(p_k) Z_k(x) \tag{5$_0$}$$

с начальными условиями:

$$Y_0(0) = b_1, \quad Z_0(0) = b_2, \quad Y(x_k) = 0, \quad Z(x_k) = 0, \tag{5$_k$}$$

Отметим, что в силу определения θ функции мы не будем рассматривать значения $Z(x)$ при $x < x_k$.

Из ($4_к$) получаем:

$$Z(x_k+0) = A_k, \quad Z(x_k-0) = 0. \tag{6}$$

Подставляя (5_0) в (6), получаем:

$$Z_0(x_1) = A_1, \tag{6$_1$}$$

$$Z_0(x_2) + Z_1(x_2) = A_2, \tag{6$_2$}$$

…………………………..

$$Z_0(x_N) + Z_1(x_N) + ... + Z_{N-1}(x_N) = A_N. \tag{6$_N$}$$

Подставив (5_0) в (5) а затем, учитывая свойства функции Хевисайда, получаем:

$$Y_0' = f(x, Y_0, Z_0), \quad (0 \le x \le 1)$$

$$\varepsilon Z_0' = g_0(x, Y_0, Z_0)\,. \tag{7_0}$$

Для определения Y_k, Z_k составляется цепочка нелинейных дифференциальных уравнений при $x \geq x_k$.

$$Y_1' = f(x, \sum_{k=0}^{1} Y_k, \sum_{k=0}^{1} Z_k) - f(x, Y_0, Z_0), \quad (x_1 \leq x \leq 1)$$

$$\varepsilon Z_1' = \sum_{k=0}^{1} g_k(x, \sum_{k=0}^{1} Y_k, \sum_{k=0}^{1} Z_k) - g_0(x, Y_0, Z_0)\,, \tag{7_1}$$

$$Y_2' = f(x, \sum_{k=0}^{2} Y_k, \sum_{k=0}^{2} Z_k) - f(x, \sum_{k=0}^{1} Y_k, \sum_{k=0}^{1} Z_k)\,, \quad (x_2 \leq x \leq 1)$$

$$\varepsilon Z_2' = \sum_{k=0}^{2} g_k(x, \sum_{k=0}^{2} Y_k, \sum_{k=0}^{2} Z_k) - \sum_{k=0}^{1} g_k(x, \sum_{k=0}^{1} Y_k, \sum_{k=0}^{1} Z_k)\,, \tag{7_2}$$

$$Y_N' = f(x, \sum_{k=0}^{N} Y_k, \sum_{k=0}^{N} Z_k) - f(x, \sum_{k=0}^{N-1} Y_k, \sum_{k=0}^{N-1} Z_k)\,, \quad (x_N \leq x \leq 1)$$

$$\varepsilon Z_N' = \sum_{k=0}^{N} g_k(x, \sum_{k=0}^{N} Y_k, \sum_{k=0}^{N} Z_k) - \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x, \sum_{k=0}^{N-1} Y_k, \sum_{k=0}^{N-1} Z_k)\,. \tag{7_N}$$

Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (7_0) ищется в виде:

$$Y_0 = \vartheta_0 + \varepsilon\xi_0, \quad Z_0 = \omega_0 + \Pi_0(\tau) + \varepsilon\eta_0, \quad \tau = \frac{x}{\varepsilon}, \tag{8}$$

с начальными условиями:

$$\vartheta_0(0) = b_1 \quad \Pi_0(0) = b_2 - \omega_0(0),$$

$$\xi_0(0,\varepsilon) = 0, \quad \eta_0(0,\varepsilon) = 0\,. \tag{8_0}$$

Из (8) (7_0) получаем:

$$\vartheta_0' = f(x, \vartheta_0, \omega_0), \quad 0 = g_0(x, \vartheta_0, \omega_0), \tag{8_1}$$

$$\Pi_0 = g_0(0, \vartheta_0(0), \omega_0(0) + \Pi_0), \tag{8_2}$$

$$\xi_0' = \frac{1}{\varepsilon}[g_0(x, \vartheta_0 + \varepsilon\xi_0, \omega_0 + \Pi_0 + \varepsilon\eta_0) - g_0(x, \vartheta_0 + \omega_0 + \Pi_0)] + \beta_0(x,\varepsilon),$$

$$\varepsilon\eta_0' = \frac{1}{\varepsilon}[g_0(x, \vartheta_0 + \varepsilon\xi_0, \omega_0 + \Pi_0 + \varepsilon\eta_0) - g_0(x, \vartheta_0, \omega_0 + \Pi_0)] + \gamma_0(x,\varepsilon), \tag{8_3}$$

где $\beta_0(x,\varepsilon) \equiv [f(x, \vartheta_0, \omega_0 + \Pi_0) - f(x, \vartheta_0, \omega_0]\dfrac{1}{\varepsilon}$;

$$\gamma_0(x,\varepsilon) \equiv -\omega_0' + [g_0(x, \vartheta_0, \omega_0 + \Pi_0) - g_0(0, \vartheta_0(0), \omega_0(0) + \Pi_0]\frac{1}{\varepsilon}.$$

Если на сегменте [0,1] удовлетворяется условие $f_y'(0, \vartheta_0(0), \omega_0(0)) \leq -\alpha_0 = const > 0$, $\left|\Pi_0(\tau)\right| \leq Ke^{-\alpha_0\tau}$, $K = const > 0$, $\tau = \dfrac{x}{\varepsilon}$.

Определим

$$A_1 = \omega_0(x_1) + \Pi_0\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon\xi_0(x_1\varepsilon)\,. \tag{9}$$

Аналогично теми же методами, как и выше, определим неизвестные функции $[Y_1, Z_1], \ldots, [Y_{N-1}, Z_{N-1}]$. Из ($7_0$) определяем неизвестные постоянные:

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left(\omega_k\left(x_N\right)+\Pi_k\left(\frac{x_N-x_k}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\eta_k\left(x_k,\varepsilon\right)\right)=A_N\,,\quad x_0=0\,. \tag{10}$$

Решение задачи Коши (6_N) для системы нелинейных дифференциальных уравнений (5_N) ищется в виде:

$$Y_N=\vartheta_N\left(x\right)+\varepsilon\xi_N\left(x,\varepsilon\right),$$

$$Z_N=\omega_N\left(x\right)+\Pi_N\left(\tau_N\right)+\varepsilon\eta_N\left(x,\varepsilon\right),\;\;\tau_N=\left(x-x_N\right)/\varepsilon \tag{10_0}$$

с начальными условиями:

$$\vartheta_N\left(x_N\right)=0,\;\Pi_N\left(0\right)=-\omega_N\left(x_N\right),\;\xi_N\left(x_N,\varepsilon\right)=0,\;\eta_N\left(x_N,\varepsilon\right)=0, \tag{10_1}$$

где $\left|\Pi_k\right|\le Ke^{-\alpha k\tau},\quad \left|\xi_k\right|,\left|\eta_k\right|\le K=const\ge 0,$,

$$\sum_{k=0}^{N}g'_{kz}\left(x,\sum_{k=0}^{N}\vartheta_k,\left(x_k\right)\sum_{k=0}^{N}\omega_k\left(x_k\right)\right)\le-\alpha_k=const>0. \tag{11}$$

Теорема. Пусть 1) нелинейные вырожденные системы (8_1), (11) имеют некоторые непрерывные решения $\left[\vartheta_k,\omega_k\right]$, $(k=\overline{0,N})$; 2) неизвестные постоянные A_k определяются из (9), (10); 3) функции *f(x,y,z), g(x,y,z),* $(k=\overline{0,N})$ имеют непрерывные производные до второго порядка в некоторой ограниченной окрестности множества M_k, $(k=\overline{0,N})$.

Тогда при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ (ε_0 – фиксированное число) система (1) (2) имеет единственное непрерывное решение:

$$y\left(x,\varepsilon\right)=\vartheta_0\left(x\right)+\varepsilon\xi_0\left(x,\varepsilon\right)+\sum_{k=1}^{N}\theta\left(p_k\right)\left(\vartheta_k\left(x\right)+\varepsilon\xi_k\left(x,\varepsilon\right)\right),$$

$$z\left(x,\varepsilon\right)=\omega_0\left(x\right)+\Pi_0\left(\tau\right)+\varepsilon\eta_0\left(x,\varepsilon\right)+\sum_{k=1}^{N}\theta\left(p_k\right)\left(\omega_k\left(x\right)+\Pi_k\left(\tau_k\right)+\varepsilon\eta_k\left(x,\varepsilon\right)\right),$$

причем при $\varepsilon\to 0$ это решение сходится к разрывному решению соответствующего вырожденного уравнения на полусегменте $0<x\le 1$.