

УДК 517.968 (575.2) (04)

СХЕМА ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЯВЛЕНИЯ РАСЩЕПЛЕНИЯ УНИМОДАЛЬНОГО НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА БОЛЬЦМАНА

П.С. Панков, В.Т. Мураталиева

С помощью метода дополнительного аргумента исследуется явление расщепления максимума унимодального начального условия интегро-дифференциального уравнения типа Больцмана, произведены численные расчеты.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение типа Больцмана; метод дополнительного аргумента; расщепление максимума унимодального начального условия.

Исследуется интегро-дифференциальное уравнение типа Больцмана:

$$\frac{\partial z(v,t)}{\partial t} + a(v,t,z(v,t)) \frac{\partial z(v,t)}{\partial v} + b(v,t)z(v,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(v,v')b(v',t)z(v',t)dv', \quad v \in \mathbb{R}, t \in [0, T] \quad (1)$$

с начальным условием

$$z(v,0) = z_0(v), \quad v \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

С применением метода дополнительного аргумента в работах [1], [2], [3] установлены достаточные условия существования решений задач вида (1)–(2) и наличия у них асимптотического свойства (стремления решения $z(v,t)$ к нулю при $|v| \rightarrow \infty$, если оно есть у начальной функции $z_0(v)$).

Численная реализация метода дополнительного аргумента позволяет получать приближенные решения сразу в исходных координатах. Применимость этого метода для уравнений математической физики показана в [4]. В [5] на основе этого метода реализовано численное решение модельной задачи.

При вычислениях по численным схемам было обнаружено явление, которое мы назвали “расщепление унимодального начального условия”. В статье [6] введено определение явления расщепления максимума унимодального начального условия, описаны условия его возникновения.

В данной работе рассматриваются условия численной реализации метода дополнительного аргумента, при которых проявляется явление расщепления максимума унимодального начального условия.

Расчеты проведены при следующих условиях:

Заданные функции $K(v, v')$, $b(v, t)$, $z_0(v)$, $a(v,t,z(v,t))$ предполагаются неотрицательными, непрерывными и равномерно ограниченными.

Несобственный интеграл предполагается сходящимся.

Для решения исходной задачи (1)–(2) данным методом, воспользуемся следующей системой в интегральной форме, согласно [7]:

$$\begin{aligned} \mu(v,t,s) &= \int_s^t a(v - \mu(v,t,\rho), \rho, w(v,t,\rho)) d\rho, \\ w(v,t,s) &= \exp\left(-\int_0^s b(v - \mu(v,t,\rho), \rho) d\rho\right) \left[z_0\left(v - \int_0^t a(v - \mu(v,t,\rho), \rho, w(v,t,\rho)) d\rho\right) \right] + \\ &+ \exp\left(-\int_0^s b(v - \mu(v,t,\rho), \rho) d\rho\right) \left[\int_0^s \int_{-\infty}^{\infty} K(v - \mu(v,t,\rho), v', \rho, w(v',\rho,\rho)) \exp\left(\int_0^\rho b(v - \mu(v,t,\xi), \xi) d\xi\right) dv' d\rho \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Произведем замену: $w(v,t,s) = y(v,t,s) \exp\left(-\int_0^s b(v - \mu(v,t,\rho), \rho) d\rho\right)$.

Тогда система (3) примет вид:

$$\begin{aligned} \mu(v, t, s) &= \int_s^t a \left(v - \mu(v, t, \rho), \rho, y(v, t, \rho) \exp \left(- \int_0^\rho b(v - \mu(v, t, \xi), \xi) d\xi \right) \right) d\rho, \\ y(v, t, s) &= z_0 \left(v - \int_0^t a \left(v - \mu(v, t, \rho), \rho, y(v, t, \rho) \exp \left(- \int_0^\rho b(v - \mu(v, t, \xi), \xi) d\xi \right) \right) d\rho \right) + \\ &+ \int_0^s \int_{-\infty}^{\infty} K \left(v - \mu(v, t, \rho), v', \rho, y(v', \rho, \rho) \exp \left(- \int_0^\rho b(v - \mu(v, t, \xi), \xi) d\xi \right) \right) dv' d\rho. \end{aligned} \quad (4)$$

Искомые функции заменяем массивами, которые содержат значения функций в некоторой сеточной области. Так как неизвестные функции μ и y зависят от трех аргументов, то сеточную область получаем трехмерной.

Для приближенного решения системы выберем интервал $[-I v; I v]$ вместо $\pm \infty$, где $I v > 0$; (нечетное) количество $N v$ узлов по v , количество $N t$ узлов по t , тогда шаги $d v = 2 * I v / (N v - 1)$; $d t = T / (N t - 1)$;

$v r[v i] = v i \cdot d v - I v$. Полагаем

$$\mu i[v i, t i, s i] \approx \mu(v r[v i], t i \cdot d t, s i \cdot d t), \quad y i[v i, t i, s i] \approx y(v r[v i], t i \cdot d t, s i \cdot d t),$$

где $v i, t i, s i$ – индексы, соответствующие v, t, s .

Тогда систему (4) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \mu i[v i, t i, s i] &= d t \sum_{\rho i = s i}^{i i - 1} a \left(v r[v i] - \mu i[v i, t i, s i], \rho i, y i[v i, t i, s i] \times \right. \\ &\times \exp \left(- d t \sum_{\xi i = 0}^{\rho i - 1} b(v r[v i] - \mu i[v i, t i, \xi i], \xi i) \right) \left. \right), \\ y i[v i, t i, s i] &= z_0 \left(v r[v i] - d t \sum_{\rho i = 0}^{i i - 1} a \left(v r[v i] - \mu i[v i, t i, \rho i], \rho i, y i[v i, t i, \rho i] \times \right. \right. \\ &\times \exp \left(- d t \sum_{\xi i = 0}^{\rho i - 1} b(v r[v i] - \mu i[v i, t i, \xi i], \xi i) \right) \left. \left. \right) \right) + \\ &+ d t \cdot d v \sum_{\rho i = 0}^{s i - 1} \sum_{v l i = 0}^{N v - 1} K(v r[v l i] - \mu i[v i, t i, \rho i], v l i, \rho i, y i[v l i, \rho i, \rho i]). \end{aligned} \quad (5)$$

Для вычисления по формулам (5) была составлена программа на языке Microsoft Visual C++ 6.0.

Для визуализации результатов использовалось программное средство Mat Lab.

Были проведены расчеты для данных:

$$T = 0,3; I v = 5; N v = 81; N t = 20; K(v, v') = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(- \frac{1}{2} (v - v')^2 \right).$$

Количество итераций (последовательных приближений) – 10.

Были проведены вычисления для начальных функций

$$z_0(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-v^2) \quad \text{и} \quad z_0(v) = \begin{cases} (v-1)^2 (v+1)^2, & -1 \leq v \leq 1 \\ 0, & -\infty < v < -1, \quad 1 < v < \infty \end{cases},$$

$$\text{и заданных функций } b(v, t) = \frac{2 + v^2 + t^2}{1 + v^2 + t^2} \quad \text{и} \quad a(v, t, z) = 0,1.$$

Из результатов видно, что для задач с ядром $K \equiv 0$ явления расщепления не возникает.

Литература

1. *Мураталиева В.Т.* Определение условий существования ограниченного решения для квазилинейного упрощенного уравнения Больцмана // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып. 34. – С. 55–64.
2. *Алексеев С.Н., Мураталиева В.Т.* Экспоненциальное убывание на бесконечности решений квазилинейного интегро-дифференциального уравнения типа Больцмана // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып. 35. – С. 55–61.
3. *Мураталиева В.Т.* Схема исследования асимптотики решений интегро-дифференциальных уравнений типа Больцмана // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2008. – Вып. 38. – С. 188–194.
4. *Иманалиев М.И., Алексеев С.Н.* К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени // Докл. АН. – 1993. – Т. 329. – № 5. – С. 543–546.
5. *Панков П.С., Иманалиев Т.М., Кененбаева Г.М.* Приближенное решение начальной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента // Юбилейная науч. конф., посв. 50-летию развития математики в Академии наук Казахстана: Тез. докл. – Алматы, 1995. – С. 164.
6. *Панков П.С., Мураталиева В.Т.* Явление расщепления унимодального начального условия для интегро-дифференциального уравнения типа Больцмана // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2010. – Вып. 40.
7. *Мураталиева В.Т.* Применение метода дополнительного аргумента для построения численного решения линейного упрощенного уравнения Больцмана // Наука и новые технологии. – Бишкек: МОНиМП, 2006. – №1. – С. 175–179.