

ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

И.К. Карасаев

Приведен пример построения характеристического уравнения.

Ключевые слова: уравнение Хилла; матрица; характеристическое уравнение.

Над построением спектра показателей трудились математики, такие как А.М. Ляпунов, А. Пуанкаре, Х. Кох, Г.В. Бондаренко, В.В. Болотин, А.П. Проскуряков, В.Ф. Журавев, К.Г. Валеев, В.А. Тафт, Н.Е. Когин и др., которым не удалось построить спектр показателей Ляпунова для уравнения Хилла. В данной статье строится характеристическое уравнение, позволяющее построить спектр показателей Ляпунова, по которому можно точно вычислить показатели Ляпунова.

Характеристическая функция $\Delta_1(\mu)$, определяется определителем [1]

$$\begin{vmatrix} \dots & 1 + \frac{\alpha}{(\mu - 2i)^2 - \alpha} & \frac{a_{-2+1}}{(\mu - 2i)^2 - \alpha} & \frac{a_{-2-0}}{(\mu - 2i)^2 - \alpha} & \frac{a_{-2-1}}{(\mu - 2i)^2 - \alpha} & \dots \\ \dots & \frac{a_{-1+2}}{(\mu - i)^2 - \alpha} & 1 + \frac{\alpha}{(\mu - i)^2 - \alpha} & \frac{a_{-1-0}}{(\mu - i)^2 - \alpha} & \frac{a_{-1-1}}{(\mu - i)^2 - \alpha} & \dots \\ \dots & \frac{a_{0+2}}{(\mu - 0i)^2 - \alpha} & \frac{a_{0+1}}{(\mu - 0i)^2 - \alpha} & 1 + \frac{\alpha}{(\mu - 0i)^2 - \alpha} & \frac{a_{0-1}}{(\mu - 0i)^2 - \alpha} & \dots \\ \dots & \frac{a_{1+2}}{(\mu + i)^2 - \alpha} & \frac{a_{1+1}}{(\mu + i)^2 - \alpha} & \frac{a_{1-0}}{(\mu + i)^2 - \alpha} & 1 + \frac{\alpha}{(\mu + i)^2 - \alpha} & \dots \\ \dots & \frac{a_{2+2}}{(\mu + 2i)^2 - \alpha} & \frac{a_{2+1}}{(\mu + 2i)^2 - \alpha} & \frac{a_{2-0}}{(\mu + 2i)^2 - \alpha} & \frac{a_{2-1}}{(\mu + 2i)^2 - \alpha} & \dots \end{vmatrix},$$

произвольный элемент которого есть

$$[\Delta_1(\mu)]_{pq} = \left(1 + \frac{\alpha}{(\mu + ip)^2 - \alpha} \right) \delta_{pq} + \frac{a_{p-q}}{(\mu + ip)^2 - \alpha}.$$

$$\begin{vmatrix} \dots & 1 + \frac{\alpha}{(\mu + 2i)^2 - \alpha} & \frac{a_{-2+1}}{(\mu + 2i)^2 - \alpha} & \frac{a_{-2-0}}{(\mu + 2i)^2 - \alpha} & \frac{a_{-2-1}}{(\mu + 2i)^2 - \alpha} & \dots \\ \dots & \frac{a_{-1+2}}{(\mu + i)^2 - \alpha} & 1 + \frac{\alpha}{(\mu + i)^2 - \alpha} & \frac{a_{-1-0}}{(\mu + i)^2 - \alpha} & \frac{a_{-1-1}}{(\mu + i)^2 - \alpha} & \dots \\ \dots & \frac{a_{0+2}}{(\mu + 0i)^2 - \alpha} & \frac{a_{0+1}}{(\mu + 0i)^2 - \alpha} & 1 + \frac{\alpha}{(\mu + 0i)^2 - \alpha} & \frac{a_{0-1}}{(\mu + 0i)^2 - \alpha} & \dots \\ \dots & \frac{a_{1+2}}{(\mu - i)^2 - \alpha} & \frac{a_{1+1}}{(\mu - i)^2 - \alpha} & \frac{a_{1-0}}{(\mu - i)^2 - \alpha} & 1 + \frac{\alpha}{(\mu - i)^2 - \alpha} & \dots \\ \dots & \frac{a_{2+2}}{(\mu - 2i)^2 - \alpha} & \frac{a_{2+1}}{(\mu - 2i)^2 - \alpha} & \frac{a_{2-0}}{(\mu - 2i)^2 - \alpha} & \frac{a_{2-1}}{(\mu - 2i)^2 - \alpha} & \dots \end{vmatrix}$$

Произвольный элемент

$$[\Delta_1(-\mu)]_{pq} = \prod_{p=-N}^N \left(1 + \frac{\alpha}{(\mu - ip)^2 - \alpha} \right) \delta_{pq} + \sum_{\omega_N} \prod_{p,q=-N}^N \frac{a_{p-q}}{(\mu - ip)^2 - \alpha}.$$

Так как p и q принимают целые значения и меняется от $-\infty$ до $+\infty$, то отсюда следует, что $\Delta_1(-\mu) = \Delta_1(\mu)$.

Теорема 1. Характеристическую функцию можно представить в виде

$$\Delta_1(\mu) = \frac{P(z) + i[r_1 P_1(z) + r_2 P_2(z)]}{P(z)}, \quad (1)$$

где

$$P(z) = (z - \beta_1)(z - \beta_2), \quad (2)$$

$$P_1(z) = (z + \beta_1)(z - \beta_2), \quad P_2(z) = (z - \beta_1)(z + \beta_2),$$

$$z = e^{2\pi i \mu}, \quad \beta_1 = e^{2\pi i \alpha_1}, \quad \beta_2 = e^{2\pi i \alpha_2}; \quad \alpha_k = \sqrt{\alpha} \quad (k=1,2).$$

Так как

$$\operatorname{ctg} \pi i (\alpha_k - \mu) = \frac{z + \beta_k}{z - \beta_k} \quad (k=1,2), \quad (3)$$

то подставляя (3) в

$$\Delta(\mu) = \frac{P(z)\Delta_1(\mu)}{P(1)e^{2\pi i \mu}}, \quad (4)$$

получим (1).

Из (1) и (4) имеем, что

$$\Delta(\mu) = \frac{1}{P(1)e^{2\pi i \mu}} [P(z) + i(r_1 P_1(z) + r_2 P_2(z))], \quad (5)$$

где

$$P(1) = (1 - \beta_1)(1 - \beta_2), \quad P(z), P_1(z), P_2(z)$$

определяются равенствами (2).

Следствие 1. Имеет место равенство

$$r_2 = -r_1. \quad (6)$$

В самом деле [1],

$$\Delta_1(\mu) = 1 + r_1 \operatorname{ctg} \pi i (\alpha_1 - \mu) + r_2 \operatorname{ctg} \pi i (\alpha_2 - \mu),$$

$$\Delta_1(-\mu) = 1 + r_1 \operatorname{ctg} \pi i (\alpha_1 + \mu) + r_2 \operatorname{ctg} \pi i (\alpha_2 + \mu).$$

Учитывая, что

$$\Delta_1(-\mu) = \Delta_1(\mu), \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \sqrt{\alpha} = \alpha_k \quad (k=1,2)$$

имеем $r_1 \operatorname{ctg} \pi i (\alpha_1 - \mu) + r_1 \operatorname{ctg} \pi i (\alpha_2 - \mu) = r_1 \operatorname{ctg} \pi i (\alpha_1 + \mu) + r_2 \operatorname{ctg} \pi i (\alpha_2 + \mu)$,

$$(r_1 + r_2) [\operatorname{ctg} i (\alpha_1 - \mu) + \operatorname{ctg} \pi i (\alpha_2 + \mu)] = 0.$$

Покажем, что

$$\operatorname{ctg} \pi i (\alpha_1 - \mu) + \operatorname{ctg} \pi i (\alpha_2 - \mu) \neq 0, \quad \mu \in G.$$

Отсюда

$$\operatorname{ctg} \pi i (\alpha_1 - \mu) + \operatorname{ctg} \pi i (\alpha_2 - \mu) = \frac{\sin(2\pi i \mu)}{\sin \pi i (\alpha_1 - \mu) \sin \pi i (\alpha_1 + \mu)}.$$

В силу условия поляризации

$$\sin \pi i (\alpha_1 - \mu) \neq 0, \quad \sin \pi i (\alpha_1 + \mu) \neq 0.$$

что противоречит условию поляризации, т.к. мы в этом случае имели бы

$$(\mu + ip)^2 - \alpha \neq 0 \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

что для носителя α поляризации этого быть не может.

Допустим, что

$$\sin(2\pi i\mu) = 0.$$

Это значит, что

$$\mu = ip \quad \text{или} \quad \mu = p + \frac{p}{2}, \quad p \in Z.$$

Этого быть не может.

Таким образом, остается принять (6).

Следствие 2. Имеет место соотношение

$$r_1 = \frac{1}{2}[\Delta(0) - 1] \operatorname{tg} \pi i \alpha_1. \quad (7)$$

В самом деле, из (5) получаем, что

$$\Delta(0) = \frac{1}{P(1)} [P(1) + i(r_1 P_1(1) + r_2 P_2(1))]$$

$$P(1) = (1 - \beta_1)(1 - \beta_2), \quad z = e^{2\pi i} = 1.$$

$$P_1(1) = (1 + \beta_1)(1 - \beta_2),$$

$$P_2(1) = (1 - \beta_1)(1 + \beta_2).$$

Учитывая (5), имеем

$$\Delta(0) = \frac{1}{P(1)} [P(1) + i r_1 (P_1(1) - P_2(1))]$$

$$\Delta(0) - 1 = r_1 \operatorname{ctg} \pi i \alpha_1,$$

$$r_1 = \frac{1}{2}[\Delta(0) - 1] \operatorname{tg} \pi i \alpha_1.$$

Теорема 2. Нули аналитических функций $\Delta_1(\mu)$ и $\Delta(\mu)$ совпадают.

В самом деле, в силу (4), имеем, что

$$\Delta(\mu) = \frac{P(z)\Delta_1(\mu)}{P(1)e^{2\pi i\mu}}.$$

Нули $P(z)$ есть простые, изолированные полюсы $\Delta_1(\mu)$, т.е. нули $P(z)$ есть полюсы $\Delta_1(\mu)$, и наоборот, полюсы $\Delta_1(\mu)$ есть нули $P(z)$, т.е. они гасят друг друга.

Таким образом, только нули $\Delta_1(\mu)$ будут нулями $\Delta(\mu)$, и наоборот, нули $\Delta(\mu)$ будут нулями $\Delta_1(\mu)$. Как известно, уравнение, определяющее характеристические показатели есть [1]:

$$\Delta_1(\mu) = 0,$$

где $\Delta_1(\mu)$ – нормальный определитель.

Поэтому решение этого уравнения можно свести к решению уравнения

$$\Delta(\mu) = 0, \quad (8)$$

а на основании (1), решение (8) сводится к решению уравнения

$$P(z) + i(r_1 P_1(z) + r_2 P_2(z)) = 0. \quad (9)$$

Это есть характеристическое уравнение для уравнения Хилла.

Далее, упростим уравнение (9). Учитывая (6), получим, что

$$P(z) + r_1 i (P_1(z) - P_2(z)) = 0,$$

где $P_1(z)$, $P_2(z)$ и $P(z)$ определяются равенствами в (2).

Развертывая левую часть данного уравнения, имеем

$$z^2 - (\beta_1 + \beta_2)z + z \cdot z^{-1} + ir_1(z^2 + (\beta_1 - \beta_2)z - 1 - z^2 + (\beta_1 - \beta_2)z + 1) = 0,$$

где

$$z = e^{2\pi i \mu}, \beta_1 = e^{2\pi i \alpha_1}, \beta_2 = e^{2\pi i \alpha_2}, \alpha_2 = -\alpha_1, \alpha_k = \sqrt{\alpha} (k=1,2).$$

$$2 \frac{z + z^{-1}}{2} - 2 \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} + 4ir_1 \frac{(\beta_1 - \beta_2)}{2} = 0.$$

Так как

$$ch(2\pi i \mu) = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad sh(2\pi i \alpha_1) = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2},$$

то

$$ch(2\pi i \mu) - ch(2\pi i \alpha_1) + 2r_1 sh(2\pi i \alpha_1) = 0,$$

или

$$\cos(2\pi i \mu) - \cos(2\pi i \alpha_1) + 2r_1 \sin(2\pi i \alpha_1) = 0.$$

Учитывая (7), имеем:

$$-\sin^2(\pi i \mu) + \sin^2(\pi i \alpha_1) + [\Delta(0) - 1] \sin^2(\pi i \alpha_1) = 0.$$

или

$$\sin^2 \pi i \mu = \Delta(0) \sin^2 \pi i \alpha_1 \tag{10}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{(\mu - Ni)^2}{(\mu - Ni)^2 - \alpha} & \dots & \frac{a_{-N+1}}{(\mu - Ni)^2 - \alpha} & \frac{a_{-N-0}}{(\mu - Ni)^2 - \alpha} & \frac{a_{-N-1}}{(\mu - Ni)^2 - \alpha} & \dots & \frac{a_{-N-N}}{(\mu - Ni)^2 - \alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{-1+N}}{(\mu - i)^2 - \alpha} & \dots & \frac{(\mu - i)^2}{(\mu - i)^2 - \alpha} & \frac{a_{-1-0}}{(\mu - i)^2 - \alpha} & \frac{a_{-1-1}}{(\mu - i)^2 - \alpha} & \dots & \frac{a_{-1-N}}{(\mu - i)^2 - \alpha} \\ \frac{a_{0+N}}{(\mu - 0i)^2 - \alpha} & \dots & \frac{a_{0+1}}{(\mu - 0i)^2 - \alpha} & \frac{(\mu - 0i)^2}{(\mu - 0i)^2 - \alpha} & \frac{a_{0-1}}{(\mu - 0i)^2 - \alpha} & \dots & \frac{a_{0-N}}{(\mu - 0i)^2 - \alpha} \\ \frac{a_{1+N}}{(\mu + i)^2 - \alpha} & \dots & \frac{a_{1+1}}{(\mu + i)^2 - \alpha} & \frac{a_{1-0}}{(\mu + i)^2 - \alpha} & \frac{(\mu + i)^2}{(\mu + i)^2 - \alpha} & \dots & \frac{a_{1-N}}{(\mu + i)^2 - \alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{N+N}}{(\mu + 2i)^2 - \alpha} & \dots & \frac{a_{N+1}}{(\mu + 2i)^2 - \alpha} & \frac{a_{N-0}}{(\mu + 2i)^2 - \alpha} & \frac{a_{N-1}}{(\mu + 2i)^2 - \alpha} & \dots & \frac{(\mu + iN)^2}{(\mu + Ni)^2 - \alpha} \end{vmatrix}$$

$\Delta(0)$ – есть значение определителя матрицы:

$$\begin{array}{cccccc} \dots & & & & & \\ \dots & \frac{2^2}{2^2 + \alpha} & \frac{-a_{-2+1}}{2^2 + \alpha} & \frac{-a_{-2-0}}{2^2 + \alpha} & \frac{-a_{-2-1}}{2^2 + \alpha} & \frac{-a_{-2-2}}{2^2 + \alpha} \dots \\ \dots & \frac{-a_{-1+2}}{1^2 + \alpha} & \frac{1^2}{1^2 + \alpha} & \frac{-a_{-1-0}}{1^2 + \alpha} & \frac{-a_{-1-1}}{1^2 + \alpha} & \frac{-a_{-1-2}}{1^2 + \alpha} \dots \\ \dots & \frac{a_{0+2}}{0^2 + \alpha} & \frac{a_{0+1}}{0^2 + \alpha} & \frac{0^2}{0^2 + \alpha} & \frac{a_{0-1}}{0^2 + \alpha} & \frac{a_{0-2}}{0^2 + \alpha} \dots \\ \dots & \frac{-a_{1+2}}{1^2 + \alpha} & \frac{-a_{1+1}}{1^2 + \alpha} & \frac{-a_{1-0}}{1^2 + \alpha} & \frac{1^2}{1^2 + \alpha} & \frac{-a_{1-2}}{1^2 + \alpha} \dots \\ \dots & \frac{-a_{2+2}}{2^2 + \alpha} & \frac{-a_{2+1}}{2^2 + \alpha} & \frac{-a_{2-0}}{2^2 + \alpha} & \frac{-a_{2-1}}{2^2 + \alpha} & \frac{2^2}{2^2 + \alpha} \dots \\ \dots & & & & & \end{array}$$

Далее исключим из (10) α_1 , кажущийся случайным. Для этого используем формулу

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right).$$

Тогда имеем

$$\sin^2(\pi i \alpha_1) = \pi^2 \prod_{p=1}^{\infty} \frac{(p^2 + \alpha)}{p^4} \prod_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(p^2 + \alpha)^2} \Delta_0,$$

где Δ_0 есть определитель матрицы

$$\begin{array}{cccccc} \dots & 2^2 & -a_{-2+1} & -a_{-2-0} & -a_{-2-1} & -a_{-2-2} \dots \\ \dots & -a_{-1+2} & 1^2 & -a_{-1-0} & -a_{-1-1} & -a_{-1-2} \dots \\ \dots & a_{0+2} & a_{0+1} & 0^2 & a_{0-1} & a_{0-2} \dots \\ \dots & -a_{1+2} & -a_{1+1} & -a_{1-0} & 1^2 & -a_{1-2} \dots \\ \dots & -a_{2+2} & -a_{2+0} & -a_{2-0} & -a_{2-1} & 2^2 \dots \\ \dots & & & & & \end{array}$$

Тогда имеем,

$$\sin^2(\pi i \alpha_1) = \pi^2 \prod_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^4} \Delta_0 = \pi^2 \prod_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{p^2} \Delta_0 = \pi^2 \begin{pmatrix} \dots & & & & & \\ & \dots & & & & \\ & & \frac{1}{2^2} & & & \\ & & & \frac{1}{1^2} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \frac{1}{1^2} \\ & & & & & & \frac{1}{2^2} \\ & & & & & & & \dots \\ & & & & & & & & \dots \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 2^2 & -a_{-2+1} & -a_{-2-0} & -a_{-2-1} & -a_{-2-2} & \dots \\ \dots & -a_{-1+2} & 1^2 & -a_{-1-0} & -a_{-1-1} & -a_{-1-2} & \dots \\ \dots & a_{0+2} & a_{0+1} & 0^2 & a_{0-1} & a_{0-2} & \dots \\ \dots & -a_{1+2} & -a_{1+1} & -a_{1-0} & 1^2 & -a_{1-2} & \dots \\ \dots & -a_{2+2} & -a_{2+0} & -a_{2-0} & -a_{2-1} & 2^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \frac{-a_{-2+1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-0}}{2^2} & \frac{-a_{-2-1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-2}}{2^2} & \dots \\ \dots & \frac{-a_{-1+2}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{-1-0}}{1^2} & \frac{-a_{-1-1}}{1^2} & \frac{-a_{-1-2}}{1^2} & \dots \\ \dots & a_{0+2} & a_{0+1} & 0 & a_{0-1} & a_{0-2} & \dots \\ \dots & \frac{-a_{1+2}}{1^2} & \frac{-a_{1+1}}{1^2} & \frac{-a_{1-0}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{1-2}}{1^2} & \dots \\ \dots & \frac{-a_{2+2}}{2^2} & \frac{-a_{2+0}}{2^2} & \frac{-a_{2-0}}{2^2} & \frac{-a_{2-1}}{2^2} & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \pi^2 d(0). \quad (11)$$

После упрощения имеем

$$\Delta(0) \sin^2 \pi i \alpha_1 = \pi^2 \prod_{p=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{p^4} \Delta_0 = \prod_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\pi^2}{p^2} \Delta_0 = \pi^2 d(0),$$

где $d(0)$ есть определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \frac{-a_{-2+1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-0}}{2^2} & \frac{-a_{-2-1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-2}}{2^2} & \dots \\ \dots & \frac{-a_{-1+2}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{-1-0}}{1^2} & \frac{-a_{-1-1}}{1^2} & \frac{-a_{-1-2}}{1^2} & \dots \\ \dots & a_{0+2} & a_{0+1} & 0 & a_{0-1} & a_{0-2} & \dots \\ \dots & \frac{-a_{1+2}}{1^2} & \frac{-a_{1+1}}{1^2} & \frac{-a_{1-0}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{1-2}}{1^2} & \dots \\ \dots & \frac{-a_{2+2}}{2^2} & \frac{-a_{2+1}}{2^2} & \frac{-a_{2-0}}{2^2} & \frac{-a_{2-1}}{2^2} & 1 & \dots \end{pmatrix} \quad (12)$$

Составим двойной ряд [2, с. 332]

$$\begin{array}{cccccc}
 \dots & & & & & & \dots \\
 \dots & + & \frac{-a_{-2+1}}{2^2} + & \frac{-a_{-2-0}}{2^2} + & \frac{-a_{-2-1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-2}}{2^2} + & \dots \\
 \dots + & \frac{-a_{-1+2}}{1^2} + & \frac{a_{-1+1}}{1^2} + & \frac{-a_{-1-0}}{1^2} + & \frac{-a_{-1-1}}{1^2} & \frac{-a_{-1-2}}{1^2} + & \dots \\
 \dots + & a_{0+2} & a_{0+1} + & & a_{0-1} & a_{0-2} + & \dots \\
 \dots + & \frac{-a_{1+2}}{1^2} + & \frac{-a_{1+1}}{1^2} + & \frac{-a_{1-0}}{1^2} + & & \frac{-a_{1-2}}{1^2} + & \dots \\
 \dots + & \frac{-a_{2+2}}{2^2} + & \frac{-a_{2+1}}{2^2} + & \frac{-a_{2-0}}{2^2} + & \frac{-a_{2-1}}{2^2} & + & \dots
 \end{array}$$

Складывая по строкам, а затем по столбцам, имеем:

$$S + \frac{S\pi^2}{3},$$

где

$$\dots + a_{0+2} + a_{0+1} + a_{0-1} + a_{0-2} + \dots + \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_{p-q} = S, \text{ при любом } p,$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{p^2} + \dots.$$

Легко доказать, что матрица (12) нормальная и наконец получаем $\sin^2 \pi i \mu = d(0)\pi^2$,

(13)

где

$$\dots + a_{0+2} + a_{0+1} + a_{0-1} + a_{0-2} + \dots + \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_{p-q} = S, \text{ при любом } p,$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{p^2} + \dots.$$

После элементарных преобразований (13) можно представить в виде

$$z^2 + 2i\sqrt{\pi^2 d(0)}z - 1 = 0, \quad z = e^{\pi i \mu},$$

$$d(0) = \det \left\| [d(0)]_{pq} \right\|_{-\infty}^{\infty},$$

$$\text{где } [d(0)]_{pq} = \begin{cases} \delta_{pq} - \frac{a_{p-q}}{p^2}, & p \neq 0, \\ 0\delta_{pq} + a_{0-q}, & p = 0, \end{cases}$$

или в развернутом виде

$$\begin{array}{cccccc}
 \dots & & & & & & \dots \\
 \dots & 1 & \frac{-a_{-2+1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-0}}{2^2} & \frac{-a_{-2-1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-2}}{2^2} & \dots \\
 \dots & \frac{-a_{-1+2}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{-1-0}}{1^2} & \frac{-a_{-1-1}}{1^2} & \frac{-a_{-1-2}}{1^2} & \dots \\
 \dots & a_{0+2} & a_{0+1} & 0 & a_{0-1} & a_{0-2} & \dots \\
 \dots & \frac{-a_{1+2}}{1^2} & \frac{-a_{1+1}}{1^2} & \frac{-a_{1-0}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{1-2}}{1^2} & \dots \\
 \dots & \frac{-a_{2+2}}{2^2} & \frac{-a_{2+1}}{2^2} & \frac{-a_{2-0}}{2^2} & \frac{-a_{2-1}}{2^2} & 1 & \dots
 \end{array}$$

Это есть окончательный вид характеристического уравнения для уравнения Хилла, которое будем называть каноническим уравнением.

Литература

1. Карасаев И.К. Построение фундаментальной системы решений уравнения Хилла // Известия вузов. – 2007. – №3–4. – Бишкек. – С. 240–245.
2. Каган В.Ф. Основания теории определителей. – Одесса, 1922. – 393 с.
3. Бондаренко Г.В. Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний. – М.: АН. СССР, 1936. – 48 с.