УДК 517.946 (575.2) (04)

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ АНТИРАНГОМ

Ж.Н. Тасмамбетов, А.Ж. Тасмамбетова

Рассматривается специальная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, для которых ранг $p \le 0$ и антиранг $m > 0$ Получены необходимые условия существования формальных решений.

Ключевые слова: ранг; антиранг; положительный антиранг; дифференциальное уравнение.

Постановка задачи. В данной работе изучается система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\left.\begin{aligned} &P^{(0)}(x,y)Z_{xx} + P^{(1)}(x,y)Z_y + P^{(2)}(x,y)Z = 0, \\ &Q^{(0)}(x,y)Z_{yy} + Q^{(1)}(x,y)Z_x + Q^{(2)}(x,y)\,Z = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где коэффициенты $P^{(i)} = P^{(i)}(x,y)$ и $Q^{(i)} = Q^{(i)}(x,y)$ $(i = 0,1,2)$ многочлены двух переменных

$$\begin{aligned} &P^{(i)}(x,y) = x^{\pi_i} \cdot y^{\delta_i} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} a^{(i)}_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} y^{\nu}\ , \\ &Q^{(i)}(x,y) = x^{\gamma_i} \cdot y^{\lambda_i} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} b^{(i)}_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} y^{\nu}\ , \end{aligned} \tag{2}$$

$(\pi_i, \delta_i, \gamma_i, \lambda_i\ (i = \overline{0,2})$ – целые неотрицательные числа, для которых ранг $p \le 0$ и антиранг $m > 0$.

Частный случай системы (1)–(2) был изучен американским математиком Е. Вильчинским [1]. Он же доказал условия совместности таких систем.

Особые кривые системы определяются приравниванием к нулю коэффициентов при старших производных Z_{xx} и Z_{yy}: $P^{(0)}(x,y) \equiv 0, Q^{(0)}(x,y) \equiv 0.$

Нами установлен простой признак определения регулярности и иррегулярности особых кривых [2].

Пусть задана система вида

$$x^2(a^{(0)}_{00} + a^{(0)}_{10}x)Z_{xx} + y(a^{(1)}_{00} + a^{(1)}_{10}x)Z_y + (a^{(2)}_{00} + a^{(2)}_{10}x + a^{(2)}_{01}y + a^{(2)}_{11}xy + a^{(2)}_{20}x^2 + a^{(2)}_{02}y^2)Z = 0,$$

$$y^2(b^{(0)}_{00} + b^{(0)}_{01}y)Z_{yy} + x(b^{(1)}_{00} + b^{(1)}_{01}y)Z_x + (b^{(2)}_{00} + b^{(2)}_{10}x + b^{(2)}_{01}y + b^{(2)}_{11}xy + b^{(2)}_{20}x^2 + b^{(2)}_{02}y^2)Z = 0$$

с известными постоянными коэффициентами.

Особые кривые системы:

$$(0,0),(0,\infty),(\infty,0),(-a^{(0)}_{00}/a^{(0)}_{10},0),(0,-b^{(0)}_{00}/b^{(0)}_{01}),(-a^{(0)}_{00}/a^{(0)}_{10},-b^{(0)}_{00}/b^{(0)}_{01}),(\infty,\infty).$$

Если $a^{(0)}_{00} = 0$ и $b^{(0)}_{00} = 0$, то особенность $(0,0)$ является особой иррегулярной. Когда они отличны от нуля, особенность $(0,0)$ является особой регулярной. В этом случае получим систему с регулярной особенностью. Аналогичным путем устанавливаем, что при $a^{(0)}_{10} \ne 0$ и $b^{(0)}_{01} \ne 0$ для последней системы особенность (∞,∞) будет регулярной, а при $a^{(0)}_{10} = 0, b^{(0)}_{10} = 0$ – иррегулярной.

В общем случае регулярность и иррегулярность особенностей системы (1) устанавливается с помощью понятия ранга и антиранга. Для таких систем одновременно можно говорить и о ранге $p=k+1$ и антиранге $m=-1-\chi$ системы, то есть можно определить как величину подранга k

$$k=\max\frac{\tau_l-\tau_0}{l}\quad(l=1,2),\tag{3}$$

так и величину антиподранга χ

$$\chi=\min\frac{\tau_i-\tau_0}{j}\quad(j=1,2),\tag{4}$$

где τ_l и τ_j совпадает с одним из чисел $\pi_i,\delta_i,\gamma_i,\lambda_i$ $(i=\overline{0,2})$.

Подранг k и антиподранг χ системы (1) определяются по независимым переменным x и y отдельно. Когда определяются подранги k_t $(t=1,2)$, то выбирается наибольшее из них за подранг системы. Наоборот, когда определяются антиподранги коэффициентов χ_t $(t=1,2)$, за антиподранг системы выбирается наименьшее из них.

Используя понятия ранга и антиранга, можно доказать ряд теорем.

Теорема 1. Система (1) имеет регулярные решения в виде рядов двух переменных

$$Z_i(x,y)=x^{\rho_i}y^{\sigma_i}\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}C_{\mu,\nu}^{(i)}x^{\mu}y^{\nu}\quad(C_{0,0}^{(i)}\neq0),\tag{5}$$

где $(\rho_i,\sigma_i,C_{\mu,\nu}^{(i)}$ $(\mu,\nu=0,1,2,...;i=1,2,3,4)$ – неизвестные постоянные), сходящиеся вблизи особенности $(x=0,\ y=0)$ в том и только в том случае, когда антиранги системы m_s $(s=1,2)$ равны нулю.

Доказательство теоремы аналогично [3].

Следствие. Для того чтобы система (1) имела четыре регулярных решения $Z_j(x,y)$ $(j=1,2,3,4)$ вблизи особенности $(x=0,\ y=0)$ необходимо и достаточно, чтобы антиподранги системы $\chi_s\geq-1$ $(s=1,2)$.

Согласно общей теории [1] систем вида (1), она может иметь до четырех линейно-независимых частных решений.

Если $x=0$ является особой регулярной кривой системы, то выполняется неравенство вида

$$\pi_0\leq\pi_s+s\quad(1\leq s\leq2).\tag{6}$$

Если хотя бы при одном значении s выполняется неравенство

$$\pi_0>\pi_s+s\quad(1\leq s\leq2),$$

то $x=0$ является особой иррегулярной.

Из (6) следует, что для регулярной особой точки

$$\pi_s-\pi_0+s\geq0\quad\text{или}\quad\frac{\pi_s-\pi_0}{s}\geq-1\qquad(1\leq s\leq2).$$

Отсюда вытекает, что если $x=0$ – особая регулярная кривая, то число $m_s\leq0$, а когда особая кривая $x=0$ – иррегулярная, число $m_s>0$.

Такие же условия должны выполняться и относительно переменной y.

Случай положительного ранга. Пусть антиранг системы $m_s>0$ $(s=1,2)$, где m_1- антиранг системы относительно независимой переменной x, а m_2- относительно независимой переменной y.

Это означает, что особые линии $x=0$ и $y=0$ – особые иррегулярные и существует формальное решение вида

$$Z_j(x,y)=\exp Q_j(\frac{1}{x},\frac{1}{y})\cdot x^{\rho_j}\cdot y^{\sigma_j}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}B_{\mu,\nu}^{(j)}\cdot x^{\mu}y^{\nu}\quad(B_{0,0}^{(j)}\neq0),\tag{7}$$

где $\rho_i, \sigma_i, B^{(j)}_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,...; j = 1,2,3,4)$ – неизвестные постоянные, которые следует определить; многочлен $Q_j(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ – многочлен двух переменных

$$Q_i(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}) = \frac{\alpha_{m0}}{mx^p} + \frac{\alpha_{0m}}{my^p} + ... + \frac{\alpha_{11}}{xy} + \frac{\alpha_{01}}{y} + \frac{\alpha_{10}}{x} \tag{8}$$

с неизвестными коэффициентами $\alpha_{m0}, \alpha_{0m}, ..., \alpha_{11}, \alpha_{01}$ и α_{10}.

В этом случае для построения решения вида (7) воспользуемся основным преобразованием

$$Z(x, y) = \exp Q(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}) \cdot U(x, y), \tag{9}$$

где неизвестные коэффициенты $\alpha_{m0}, \alpha_{0m}, ..., \alpha_{11}, \alpha_{01}$ и α_{10} многочлена (8) определяются из вспомогательной системы относительно неизвестной $U(x, y)$. Они определяются приравниваем к нулю m_s $(s = 1,2)$ коэффициентов

$$b^{(j)}_{m0} = 0,\, b^{(j)}_{0m} = 0,\, b^{(j)}_{m-1,0} = 0, ..., b^{(j)}_{10} = 0, b^{(j)}_{00} = 0 \quad (j = 1,2) \tag{10}$$

при наинизших степенях независимых переменных x и y при $U(x, y)$.

Каждое из них определяет систему, состоящую из двух уравнений.

Тогда первое необходимое условие существования формального решения вида (7) формулируется в виде следующего утверждения.

Теорема 2. Для того чтобы вспомогательная система, полученная с помощью преобразования (9) из системы (1), имела хотя бы одно решение вида (7), необходимо, чтобы имели место равенства (10).

Второе необходимое условие связано с построением решения вида (5), где неопределенные постоянные ρ и σ находятся из системы определяющих уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} f^{(1)}_{00}(\rho, \sigma) = a^{(0)}_{00}\rho(\rho - 1) + a^{(1)}_{00}\rho + a^{(2)}_{00}\sigma + a^{(3)}_{00} = 0,\\ f^{(2)}_{00}(\rho, \sigma) = b^{(0)}_{00}\sigma(\sigma - 1) + b^{(1)}_{00}\rho + b^{(2)}_{00}\sigma + b^{(3)}_{00} = 0,\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

а неизвестные коэффициенты $C_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,...)$ находятся из системы рекуррентных последовательностей:

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} C_{\mu-m,\nu-n} f^{(j)}_{m,n}(\rho + \mu - m, \sigma + \nu - n) = 0,\ (m, n = 0,1,2,...; \mu, \nu = 0,1,2,...)\,. \tag{12}$$

Приведем формулировку второго необходимого условия.

Теорема 3. Для того чтобы вспомогательная система имела решения вида (7), необходимо, чтобы пара (ρ, σ) была корнем системы определяющих уравнений вида (11), где $f^{(j)}_{00}(\rho, \sigma), (j = 1,2)$ есть коэффициенты при наименьших степенях системы характеристических функций, полученных из вспомогательной системы путем подстановки вместо неизвестной $Z(x, y) = x^{\rho} y^{\sigma}$.

Выполнение приведенных выше двух необходимых условий приведет к справедливости следующего утверждения:

Теорема 4. Если системы характеристических уравнений имеют только простые пары корней, то система (1) при положительном антиранге $m_s > 0$ $(s = 1,2)$ и ранге $p \le 0$ допускает четыре формальных решения вида (7).

Если системы характеристических уравнений имеют кратные корни, то система (1) имеет так называемые **поднормальные** решения. Этот случай до сих пор остается не исследованным.

Литература

1. *Wilczynski E.J.* Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces. – Leipzig: Feubner, 1906. – 120 p.

2. *Тасмамбетов Ж.Н.* Нормальные решения специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с полиномиальными коэффициентами: Автореф. дис… докт. физ.-мат. наук. – Алматы, 2004. – 41 с.
3. *Тасмамбетова А.Ж., Тасмамбетов Ж.Н.* Решение систем дифференциальных уравнений в частных производных с положительным антирангом // Вестник КазГУ. Сер. матем., механика, информатика. Спец. выпуск. – 2008. – №3. – С. 237–244.