УДК 517.977.5 (575.2) (04)

О ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

С.О. Отакулов

Рассматриваются управляемые дифференциальные включения с параметрами. Для этой модели изучена задача быстродействия. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности.

Ключевые слова: система управления; дифференциальные включения; параметр; оптимальное управление; условия оптимальности.

В теории оптимального управления особый интерес представляют модели систем управления в условиях неопределенности [1, 2]. Они возникают в результате учета таких важных факторов, как неточности измерений, неполнота информации об исходных данных и внешних сил возмущения, дискретность процесса наблюдения и т.п. При исследовании таких моделей в качестве эффективного математического аппарата используются управляемые дифференциальные включения и их дискретные аналоги [3, 4].

Для обеспечения качества систем управления в условиях информационных ограничений возникает необходимость исследования моделей систем управления с учетом влияния различных параметров. А это приводит к моделям задач управления динамических систем, описываемых дифференциальными включениями с параметрами [5].

Рассмотрим дифференциальное включение вида

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t,u,q),\ x(t_0) \in D, u \in V, q \in Q,\ t \in T_\infty = [t_0, +\infty), \tag{1}$$

где x – n-вектор состояния, u – m-вектор управления, q – k-векторный параметр управления, $A(t)$ – $n \times n$-матрица, $B(t,u,q) \subset R^n$.

Для системы (1) будем считать, что управление u реализуется в виде управляющей функции $u = u(t)$, а параметр q остается постоянным в течение процесса управления. Измеримую на некотором промежутке $T(u) = [t_0, t_1(u)]$ ($T(u) \subset T_\infty$) m–вектор-функцию $u = u(t)$ назовем допустимым управлением для системы (1), если $u(t) \in V$ почти всюду (п.в.) на $T(u)$. Обозначим через $U(T_a)$ множество всех допустимых управлений, определенных на $T_a = [t_0, a]$ ($T_a \subset T_\infty$). Допустимой траекторией, соответствующей допустимому управлению $u = u(t)$, $t \in T(u)$, и параметру $q \in Q$, назовем абсолютно непрерывную n-вектор-функцию $x(t) = x(t,u,q)$, удовлетворяющую почти всюду на $T(u)$ дифференциальному включению (1) и начальному условию $x(t_0) \in D$. Пусть $H_{T_a}(u,q,D)$ – множество всех допустимых траекторий, соответствующих допустимому управлению $u \in U(T_a)$, параметру $q \in Q$ и начальному множеству D. Положим $X_{T_a}(t,u,q,D) = \{\xi : \xi = x(t), x(\cdot) \in H_{T_a}(u,q,D)\}$.

Определение 1. Число $t(u,q) \subset T_a$ назовем первым моментом времени перевода ансамбля траекторий $X_{T_a}(t,u,q,D)$ системы (1) на непрерывное компактное множество $Y(t) \subset R^n$, если:

а) $X_{T_a}(t(u,q),u,q,D) \subset Y(t(u,q))$; б) $X_{T_a}(t,u,q,D) \setminus Y(t) \neq \varnothing, t_0 \leq t < t(u,q)$. (2)

Рассмотрим задачу быстродействия: минимизировать функционал $t(u,q)$, определенный условиями (2).

Эту задачу будем изучать в следующих предположениях: 1) элементы матрицы $A(t)$ суммируемы на каждом $T_a \subset T_\infty$; 2) $D \subset R^n$ – компакт, а $V \subset R^m$, $Q \subset R^k$ – выпуклые компакты; 3) для любых $t \in T_\infty$, $u \in V, q \in Q$ множества $B(t,u,q)$ непустые компакты из R^n; 4) для любого $T_a \subset T_\infty$ многозначное отображение $(t,u,q) \to B(t,u,q)$ измеримо по $t \in T_a$, непрерывно по $(u,q) \in V \times Q$ и существует суммируемая на T_a функция $\beta(t)$, такая, что $\sup\{\|\gamma\| : \gamma \in B(t,u,q)\} \le \beta(t)\}$, $(t,u,q) \in T \times V \times Q$; 5) при каждом $t \in T_\infty$, $\psi \in R^n$ опорная функция $(u,q) \to c(B(t,u,q),\psi)$ выпукла на $(u,q) \in V \times Q$.

Обозначим через $W(T_a, Y)$ множество допустимых пар $(u,q) \in U(T_a) \times Q$, осуществляющих перевод ансамбля траекторий на множество $Y(t)$.

Рассмотрим функционал $\mu_a(t,u,q) = \sup\limits_{\|\psi\|=1}[c(X_{T_a}(t,u,q,D),\psi) - c(Y(t),\psi)]$, $t \in T_a$, $u \in U(T_a)$. При выполнении условий (1)–(5) функционал $\mu_a(t,u,q)$ является непрерывным на $T_a \times U(T_a) \times Q$ и выпуклым по (u,q) на $U(T_a) \times Q$.

Лемма 1. Для того, чтобы пара $(\tilde{u},\tilde{q}) \in W(T_a,Y)$ переводила ансамбль траекторий $X_{T_a}(t,u,q,D)$ системы (1) на множество $Y(t)$ и $t(\tilde{u},\tilde{q})$ был первым моментом времени перехода, необходимо и достаточно выполнение соотношений: $\mu_a(t(\tilde{u},\tilde{q}),\tilde{u},\tilde{q}) = 0$, $\mu_a(t,\tilde{u},\tilde{q}) > 0$, $t_0 \le t < t(\tilde{u},\tilde{q})$.

Теорема 1. Для того, чтобы управление $u^* \in U(T_a)$, параметр $q^* \in Q$ и момент времени $t^* \in T_a$ были оптимальными в задаче быстродействия, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\mu_a(t^*,u^*,q^*) = \min_{u \in U(T_a), q \in Q} \mu_a(t^*,u,q) = 0, \tag{3}$$

t^* – минимальный корень уравнения

$$\min_{u \in U(T_a), q \in Q} \mu_a(t,u,q) = 0, t \in T_a. \tag{4}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $(u^*,q^*) \in U(T_a) \times Q$ – оптимальная пара в задаче быстродействия, $t^* \in T_a$ – оптимальное время перехода. Тогда ясно, что $t^* \in t(u^*,q^*)$. Поэтому в силу леммы 1 $\mu_a(t^*,u^*,q^*) = 0$. Далее, так как $t_0 \le t^* \le t(u,q)$, $\forall (u,q) \in W(T_a,Y)$, то согласно лемме 1

$$\mu_a(t^*,u,q) \ge 0, \ \forall (u,q) \in W(T_a,Y). \tag{5}$$

Кроме того, ясно, что

$$\mu_a(t^*,u,q) > 0, \ \forall (u,q) \in (U(T_a) \times Q) \setminus W(T_a,Y). \tag{6}$$

Учитывая равенство $\mu_a(t^*,u^*,q^*) = 0$, из (5) и (6) получим (3).

Из доказанного равенства (3) следует, что оптимальное время перехода t^* является корнем уравнения (4). Покажем, что t^* – наименьший корень этого уравнения.

В самом деле, если $t_0 \le \hat{t} < t^*$, то $\mu_a(\hat{t},u,q) > 0$, $\forall (u,q) \in U(T_a) \times Q$. В условиях теоремы множество $U(T_a)$ – слабый компакт пространства $L_2^m(T_a)$ и функционал $(u,q) \to \mu_a(\hat{t},u,q)$ слабо полунепрерывно снизу на $U(T_a) \times Q$. Поэтому существует элемент $(\hat{u},\hat{q}) \in U(T_a) \times Q$ такой, что

$$\inf\{\mu_a(\hat{t},u,q) : (u,q) \in U(T_a) \times Q\} = \mu_a(\hat{t},\hat{u},\hat{q}) > 0,$$

т.е. $\hat{t} < t^*$ не является корнем уравнения (4).

Достаточность. Пусть выполняются условия (3), (4). Можно показать, что

$$\min_{u \in U(T_a), q \in Q} \mu_a(t,u,q) > 0, \forall t < t^*, t \in T_a. \tag{7}$$

Тогда из (3) и (7) следуют соотношения:

$$\mu_a(t^*,u^*,q^*) = 0, \ \mu_a(t,u^*,q^*) \ge \min_{u \in U(T_a), q \in Q} \mu_a(t,u,q) > 0, \ t_0 \le t < t^*.$$

В силу леммы 1 отсюда получим, что $(u^*,q^*)\in W(T_a,Y)$, $t^*=t(u^*,q^*)$.

Для любой пары $(u,q)\in W(T_a,Y)$ имеем $t^*\le t(u,q)$. В самом деле, если допустим, что для некоторой пары $(\tilde{u},\tilde{q})\in W(T_a,Y)$ будет $t(\tilde{u},\tilde{q})<t^*$, то согласно (7) получим соотношение $\mu_a(t(\tilde{u},\tilde{q}),\tilde{u},\tilde{q})\ge \min\limits_{u\in U(T_a),q\in Q}\mu_a(t(\tilde{u},\tilde{q}),u,q)>0$, которое противоречит лемме 1.

Таким образом, мы убедились, что $t(u,q)\ge t^*=t(u^*,q^*)$, $\forall(u,q)\in W(T_a,Y)$, $(u^*,q^*)\in W(T_a,Y)$, т.е. (u^*,q^*) – оптимальная пара в задаче быстродействия, t^* – оптимальное время перехода. Теорема доказана.

Рассмотрим функцию $\gamma_a(t)=\sup\limits_{\|\psi\|=1}[\inf\limits_{u\in U(T_a),q\in Q}c(X_{T_a}(t,u,q,D),\psi)-c(Y(t),\psi)]$, $t\in T_a$.

Определение 2. Систему (1) назовем нормальной, если существует момент $a>t_0$ такой, что минимальный корень уравнения $\gamma_a(t)=0$, $t\in T_a$ существует и этот корень является решением уравнения (4).

Лемма 2. При выполнении условий (1)–(5) для нормальной системы (1) минимальные корни уравнения (4) и уравнения $\gamma_a(t)=0$, $t\in T_a$ совпадают.

Теорема 2. Предположим, что система (1) является нормальной. Тогда если $u^*(t)$, $t\in T^*=[t_0,t^*]$ ($t^*\in T_a$) – оптимальное управление, $q^*\in Q$ – оптимальное значение параметра, t^* – оптимальное время перехода в задаче быстродействия, то:

а) t^* является минимальным корнем уравнения

$$\max_{\|\psi\|=1}[C(F(t,t_0)D,\psi)+\min_{q\in Q}\int_{t_0}^{t}\min_{v\in V}C(F(t,\tau)B(\tau,v,q),\psi)d\tau-C(Y(t),\psi)]=0,\ t\in T_a; \tag{8}$$

$$\text{б) }\min_{q\in Q}\int_{t_0}^{t^*}\min_{v\in V}C(F(t^*,\tau)B(\tau,v,q),\psi^*)d\tau=\int_{t_0}^{t^*}\min_{v\in V}C(F(t^*,\tau)B(\tau,v,q^*),\psi^*)d\tau; \tag{9}$$

$$\text{в) }\min_{v\in V}C(F(t^*,t)B(t,v,q^*),\psi^*)=C(F(t^*,t)B(t,u^*(t),q^*),\psi^*)\ \text{п.в. на } T^*, \tag{10}$$

где ψ^* – n-вектор, на котором достигается максимум в левой части (8) при $t=t^*$, $F(t,\tau)$ – фундаментальная матрица решений уравнения $\dot{x}=A(t)x$. Пусть, наоборот, выполняются условия (8)–(10), причем $u^*(t)$, $t\in T^*=[t_0,t^*]$ ($t^*\in T_a$) и $q^*\in Q$ определяются из (9), (10) однозначно (почти для всех $t\in[t_0,t^*]$). Тогда $u^*(t)$, $t\in[t_0,t^*]$, – оптимальное управление, $q^*\in Q$ – оптимальное значение параметра, t^* – оптимальное время перехода в задаче быстродействия.

Литература

1. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 392 с.
2. *Кейн В.Н.* Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. – М.: Наука, 1985. – 248 с.
3. *Константинов Г.Н.* Достаточные условия оптимальности для минимаксной задачи управления ансамблем траекторий // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 297. – № 2. – С. 287–290.
4. *Отакулов С.* Об условиях оптимальности в минимаксной задаче для дискретных включений // Узб. матем. журн. – 1991. – № 3. – С. 49–56.
5. *Отакулов С., Собирова Г.Д.* Об одной задаче управления ансамблем траекторий дифференциального включения // Труды межд. конф. “Устойчивость и процессы управления”. – Т. 2. – СПб., 2005. – С. 907–916.